

연속체 손상역학을 이용한 수치 피로시험 기법

이치승* · 김영환* · 김태우* · 이제명*

*부산대학교 공과대학 조선해양공학과

Numerical Fatigue Test Method Based on Continuum Damage Mechanics

Chi-Seung Lee*, Young-Hwan Kim*, Tae-Woo Kim* and Jae-Myung Lee*

*Dept. of Naval Architecture & Ocean Engineering, Pusan National University, Pusan 609-735, Korea

Abstract

Once assessment of material failure characteristics is captured precisely in a unified way, it can be directly incorporated into the structural failure assessment under various loading environments, based on the theoretical backgrounds so called Local Approach to Fracture. The aim of this study is to develop a numerical fatigue test method by continuum damage mechanics applicable for the assessment of structural integrity throughout crack initiation and structural failure based on the Local Approach to Fracture. The generalized elasto-visco-plastic constitutive equation, which can consider the internal damage evolution behavior, is developed and employed in the 3-D FEA code in order to numerically evaluate the material and/or structural responses. Explicit information of the relationships between the mechanical properties and material constants, which are required for the mechanical constitutive and damage evolution equations for each material, are implemented in numerical fatigue test method. The material constants selected from constitutive equations are used directly in the failure assessment of material and/or structures. The performance of the developed system has been evaluated with assessing the S-N diagram of stainless steel materials.

* Corresponding author : jaemlee@pusan.ac.kr

(Received December 19, 2006)

Key Words : Continuum damage mechanics, Local approach to fracture, Finite element analysis, Fatigue.

1. 서 론

강구조물을 포함한 대부분의 산업용 구조물 혹은 수송체 등은 일생을 통하여 다양한 하중환경 하에 놓이게 되며, 그 중에서 수명과 가장 밀접하게 연관되는 인자로서 피로현상을 들 수 있다. 그 이유는 구조나 재료의 극한강도를 초과하지 않는 하중영역이라 하더라도 반복적인 작용으로 인하여 내부적인 손상이 누적되고, 이것이 거시적인 균열로 성장하여 고유의 기능상실을 일으키는 피해를 줄 수 있기 때문이다.

따라서 현재 운용중인 구조물인 경우는 가능한 범위에서, 수명에 대한 정확한 판단을 바탕으로 보수·유지

에 관한 적절한 대처를 해야 함은 물론, 설계 단계에서는 피로수명예측과 함께 구조물의 안전성을 평가할 수 있어야 한다.

하지만, 대부분의 경우 반복하중이 작용하는 환경을 물리적인 실험을 통하여 구축하기에는 비용적인 면이나 효율성 측면에서 많은 걸림돌이 존재한다. 물론, 가장 정확하고 신뢰성 높은 방법은 실험을 통한 평가라고 볼 수 있지만, 실험적 접근법이 지니고 있는 이러한 제약요건들에 의하여 실험을 대체할 수 있는 해석적 시도가 지속적으로 이루어져 왔다.

이들 연구들에서는, 구조물의 안전성 또는 피로강도 평가를 위한 다양한 모델들을 제안하거나 적용하고 있으나, 거시적 균열의 발생에 우선하는 내부 손상의 영향

에 대한 고려와 손상발생영역과 비손상영역의 구분이 명확하지 못한 등의 이유로 정량적인 손상량의 발생 수준을 예측하는데 무리가 있다.

이러한 이유로 내부손상을 정량적인 상태변수로 처리해야 할 필요성이 대두되었고 Kachanov에 의해 처음으로 연속체 손상역학이 제안되었다¹⁾. 이는 재료내부에 분포하는 미세결합의 평균적인 밀도를 손상이라는 상태변수로 정의하고, 비결합 상태에서부터 균열의 발생과 진전에 이르기까지의 전 과정을 파악할 수 있도록 하는 이론적, 물리적 근거를 제시하였다. 또한 연속체 역학의 범주에서 수치계산을 통하여 손상을 포함하는 재료의 비선형 거동을 잘 표현할 수 있는 강점을 지니고 있으며, 최근 급격하게 발전한 유한요소해석기술과 접목되어 재료나 구조물의 손상 안전성 평가에 적용되고 있다.

본 연구에서는, 실험적인 접근이 힘든 분야의 대표적인 경우인 피로손상 문제에 대하여 연속체 손상역학을 이용한 수치피로시험 기법을 제안하고, 그 적용사례를 보임으로써 제안 기법의 유용성을 확인한다.

2. 연속체 손상역학

2.1 유한요소정식화

유한요소해석기술은 재료나 구조물의 강도를 평가하는데 가장 효과적인 도구이며 기본적으로 연속체 역학의 발전과 궤를 같이 하고 있다. 진술한 바와 같이, 손상역학 역시 그 이론의 전개와 실제 적용을 위한 도구로서의 유한요소해석기술과의 접목 등을 이유로 연속체 손상역학이라고 불리고 있다. 파괴역학이 균열선단이 정의되는 문제에서만 의미를 가지는 반면에 연속체 손상역학은 균열의 존재 여부를 떠나서 모든 역학적 거동을 연속체 역학의 범주에서 다룰 수 있다.

이러한 이유로, 인장 · 압축 · 피로 등 다양한 하중을 받는 재료 및 구조물의 손상을 예측함과 동시에 손상을 고려한 파괴현상을 예측 가능하게 하는 연속체 손상역학 기반 비선형 유한요소해석이 각광을 받고 있다.

고려 가능한 모든 비선형거동을 예측하고자 하는 비선형 유한요소해석에 있어서, 증분형 요소 강성 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다^{2,3)}.

$$[k_0] \{\Delta u\} = \{\Delta f\} + \{\Delta f_p\} + \{\Delta f_T\} + \{\Delta f_D\} \quad (1)$$

$$[k_0] = \int_V [B_0]^T [\overline{D}_e] [B_0] dV \quad (2)$$

$$\{\Delta f_p\} = \int_V [B_0]^T [\overline{D}_e] \{\Delta \epsilon^p\} dV \quad (3)$$

$$\{\Delta f_T\} = \int_V [B_0]^T [\overline{D}_e] \{\Delta \epsilon^T\} dV \quad (4)$$

$$\{\Delta f_D\} = \int_V [B_0]^T \Delta D \{\bar{\sigma}\} dV \quad (5)$$

여기서,

$[B_0]$: Strain-displacement matrix

$[D_e]$: Stress-strain matrix for undamaged state

$[\overline{D}_e]$: Stress-strain matrix for damaged state

$[k_0]$: Incremental stiffness matrix

$\{\Delta f\}$: External force increment vector

$\{\Delta f_p\}$: Apparent external force increment vector due to plastic strain increment vector

$\{\Delta f_T\}$: Apparent external force increment vector due to thermal strain increment vector

$\{\Delta f_D\}$: Apparent external force increment vector due to damage increment vector

식 (5)에 대한 시간적분을 통하여 주어진 하중이력에서의 손상해석이 가능하며, 손상발전을 고려한 소성 변형률 속도는 다음과 같다⁴⁾.

$$\{\dot{\epsilon}_p\} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{1 - D} \right\rangle^N \frac{\{\sigma^d\}}{\sigma_{eq}} \quad (6)$$

$$R = Q_1 p + Q_2 (1 - e^{-bp}) \quad (7)$$

여기서,

R : Strain hardening parameter

$D (0 < D < 1)$: Damage variable

N, K, k, Q_1, Q_2, b : Material constants

$\{\sigma^d\}$: Deviatoric stress

σ_{eq} : von Mises equivalent stress

p : Accumulated plastic strain

$\langle \rangle$: Macauley parenthesis

2.2 재료정수의 결정

재료정수의 결정에 있어서 재료정수를 포함한 구성방정식을 수학적으로 완전히 표현하는 것은 매우 어렵다. 이를 구하기 위한 방법으로 수치 접근법이 가장 근사한 방법으로 간주되고 있다. Furukawa 등은 구성방정식의 재료정수를 결정하는 데 있어서 진화 알고리즘 사용한 일 반적 목표 시스템을 제안하였다⁵⁾. 또한, Mostaghel 등은

단조하중 뿐 아니라 반복하중에서 재료의 거동을 잘 나타내는 Ramberg-Osgood 방정식의 반전을 수학적으로 전개함으로써 재료정수를 결정하였다⁶⁾.

물리적인 직감으로부터, 경화 항은 항복 이후 영역의 응력의 양과 관계가 있다. 뿐만 아니라, 항복응력이나 극한응력 그리고 탄성계수 등과 같은 재료 물성치의 상관관계를 고려할 때, 재료정수와 연관된 경화를 표현하는 데 이들과 같이 비교적 쉽게 얻을 수 있는 재료 물성치를 사용하는 것은 매우 바람직할 것이다.

그림 1은 일반적인 강의 일축인장시험의 응력 변형률 곡선이다. 항복응력 지점에서의 점 A(proportional limit)를 완전소성에 의한 응력과 등방경화에 의한 응력, 그리고 등가응력으로 표현한다.

$$\sigma_{eq} - R - k = 0 \tag{8}$$

식 (6)~(8)의 관계로부터 재료정수를 구한다.

$$k = \sigma_{eq} \approx 0.9\sigma_{eq} = 0.9\sigma_Y \tag{9}$$

$$Q_1 = 0.1\sigma_Y \tag{10}$$

$$Q_2 = \sigma_T - \sigma_Y \tag{11}$$

$$b = -\frac{1}{2\varepsilon_f} \ln\left(\frac{Q_1(\varepsilon_f - 1)}{Q_2}\right)^2 \tag{12}$$

여기서,

σ_Y : Yield stress

σ_T : Ultimate stress

ε_f : Strain at fracture stress

한편, 식 (13)의 K' 과 n' 에 대응하는 재료정수 K 와 N 을 유도하기 위해 Ramberg-Osgood 방정식을 이용한다. 이 방정식은 응력-변형률 곡선을 표현하는 데 일반적으로 사용되며 많은 재료의 거동을 잘 기술할 수 있

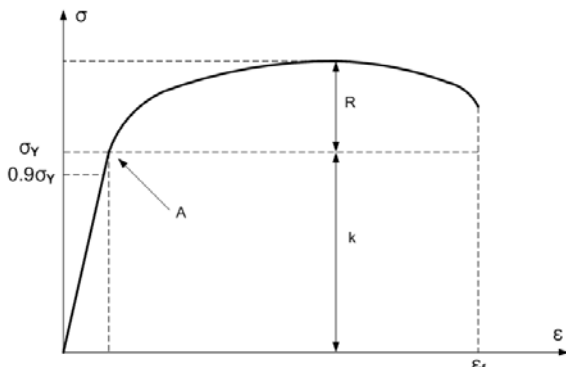


Fig. 1 Schematic of general stress-strain relationship

것으로 알려져 있다.

Ramberg-Osgood 응력-변형률 관계는 다음과 같고 변형률에 대한 응력의 곡선을 그림 2에서와 같이 나타낼 수 있다⁷⁾.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \tag{13}$$

여기서,

σ : Stress

ε : Strain

$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$: Elastic strain

$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}$: Plastic strain

E : Modulus of elasticity

K' : Cyclic-strength coefficient

n' : Cyclic strain-hardening exponent

이 곡선을 탄성 변형률 지배 구간과 소성 변형률 지배 구간으로 나눈다. 먼저 탄성 변형률 지배 구간에서는 다음 식과 같은 급수법칙을 이용하여 응력을 총변형률의 함수로 표현 가능하다.

$$\sigma = E\varepsilon - \alpha\varepsilon^\beta \tag{14}$$

매개변수 α, β 는 탄성 변형률 지배 구간과 소성 변형률 지배 구간의 접점에서 응력과 기울기의 대응으로 구할 수 있다. 접점에서의 변형률을 ε_0 로, 그리고 이에 대응하는 접점에서의 응력과 기울기를 σ_0 와 E_0 로 각각 나타내면 매개변수 α, β 는 다음 두 식과 같이 나타낼 수 있다.

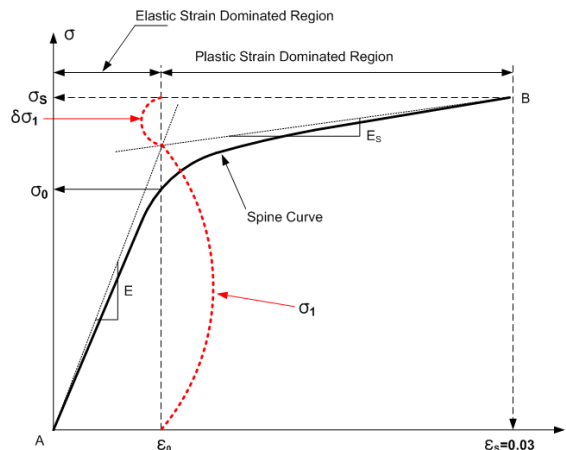


Fig. 2 Ramberg-Osgood stress-strain curve

$$\alpha = \frac{E\varepsilon_0 - \sigma_0}{\varepsilon_0^\beta} \quad (15)$$

$$\beta = \frac{(E - E_0)\varepsilon_0}{E\varepsilon_0 - \sigma_0} \quad (16)$$

소성 변형률 지배 구간에서의 응력-변형률 관계를 나타내기 위해서 Ramberg-Osgood 방정식을 응력에 관하여 전개한다. 즉,

$$\frac{E}{K'} \varepsilon_e = \left(1 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon}\right)^{n'} \varepsilon^{n'} \quad (17)$$

이항정리를 이용하여 위 식의 우변을 2차까지 전개하고 정리하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_e = \frac{K'}{E} \varepsilon^{n'} \left[1 - n' \left(\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon}\right) + \frac{n'(n'-1)}{2} \left(\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon}\right)^2 \right] \quad (18)$$

위 식을 간단히 나타내면, 이 방정식은 다음과 같다.

$$a + b\varepsilon_e + c\varepsilon_e^2 = 0 \quad (19)$$

여기서,

$$a = \varepsilon^{n'}$$

$$b = -\left(\frac{E}{K'} + n' \varepsilon^{n'-1}\right)$$

$$c = \frac{n'(n'-1)\varepsilon^{n'-2}}{2}$$

1차 근사는 식 (19)에서 지수가 1 이하인 항만을 고려하는 것이다. 즉,

$$a + b\varepsilon_e = 0 \quad (20)$$

위 식에 a, b 를 대입하고, $\varepsilon_e = \sigma/E$ 를 고려하면 다음과 같다.

$$\sigma_1 = \frac{K' \varepsilon^{n'}}{1 + \frac{K'}{E} n' \varepsilon^{n'-1}} \quad (21)$$

이 때, σ_1 은 1차 근사 응력을 나타낸다. 또한 그림 2에서 $\delta\sigma_1$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta\sigma_1 = \sigma_s - \frac{K' \varepsilon^{n'}}{1 + \frac{K'}{E} n' \varepsilon^{n'-1}} \quad (22)$$

그림 2에서 E 와 E_s 를 기울기로 표현하면 접점에서

의 변형률 ε_0 를 구할 수 있다. 즉,

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad (23)$$

$$E_s = \frac{\sigma_s - \sigma_1}{\varepsilon_s - \varepsilon_0} \quad (24)$$

이를 ε_0 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_s - E_s \varepsilon_s}{E - E_s} \quad (25)$$

여기서,

σ_s : Ultimate stress

ε_s : Ultimate strain

E : Modulus of elasticity in elastic region

E_s : Modulus of elasticity in plastic region

$\sigma_s = \sigma(\varepsilon_s)$ 이고 식 (13)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_s = \frac{d\sigma(\varepsilon_s)}{d\varepsilon} = \frac{E}{1 + \frac{E}{n'(K')^{-\frac{1}{n'}} (\sigma_s)^{\frac{1}{n'} - 1}}} \quad (26)$$

한편, 식 (13)의 양변에 로그를 취한 후 σ 를 σ_s 로, ε 을 ε_s 로 바꾸면 다음과 같다.

$$K' = \frac{\sigma_s}{\left(\varepsilon_s - \frac{\sigma_s}{E}\right)^{n'}} \quad (27)$$

재료 물성치를 통일하기 위해 σ_s 를 σ_T 로, ε_s 를 ε_f 로, n' 를 $1/N$ 로, K' 을 K 로 바꾸면 식 (27)은 다음 식과 같이 표현된다.

$$K = \frac{\sigma_T}{\left(\varepsilon_f - \frac{\sigma_T}{E}\right)^{\frac{1}{N}}} \quad (28)$$

또한, 식 (27)을 다르게 나타내면 다음 식과 같다.

$$(K')^{-\frac{1}{n'}} (\sigma_s)^{\frac{1}{n'} - 1} = \frac{\varepsilon_s - \frac{\sigma_s}{E}}{\sigma_s} \quad (29)$$

식 (29)를 식 (26)에 대입하면 다음과 같다.

$$E_s = \frac{\sigma_s}{\frac{\sigma_s}{E} + \frac{1}{n'} \left(\epsilon_s - \frac{\sigma_s}{E} \right)} \quad (30)$$

한편, 식 (23)과 식 (24)를 σ_1 에 대하여 정리하여 연립하고 다시 E_s 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$E_s = \frac{\sigma_s - E\epsilon_0}{\epsilon_s - \epsilon_0} \quad (31)$$

마지막으로, 식 (30)과 식 (31)을 연립하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{n'} = \frac{1}{\epsilon_s - \frac{\sigma_s}{E}} \left(\frac{\sigma_s(\epsilon_s - \epsilon_0)}{\sigma_s - E\epsilon_0} - \frac{\sigma_s}{E} \right) \quad (32)$$

재료 물성치를 통일하기 위해 σ_s 를 σ_T 로, ϵ_s 를 ϵ_f 로, n' 를 $1/N$ 로, K' 을 K 로 바꾸면 식 (32)는 다음 식과 같이 표현된다.

$$N = \frac{1}{\epsilon_f - \frac{\sigma_T}{E}} \left(\frac{\sigma_T(\epsilon_f - \epsilon_0)}{\sigma_T - E\epsilon_0} - \frac{\sigma_T}{E} \right) \quad (33)$$

여기서,

ϵ_0 : Strain at yield stress

전술한 유한요소해석 구성방정식과 손상해석 알고리즘을 기반으로 개발된 비선형 유한요소해석 프로그램을 이용하여 STS304 스테인리스강의 응력-변형률 거동을 시뮬레이션 한다. 그림 3은 STS304 스테인리스강

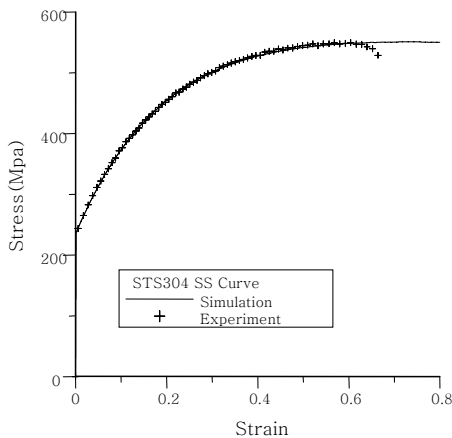


Fig. 3 Comparison of stress-strain relationship between numerical simulation and experiments

시험시편의 일축인장시험 및 시뮬레이션에 의한 응력-변형률 선도를 비교한 그림이다.

2.3 손상발전방정식

거시적인 결함(macro-cracks)이 발생하기까지 나타나는 핵형성(nucleation)과 미세 결함(micro-cracks)의 성장에 의한 금속 내부의 손상은 피로나 탄성 그리고 소성과 같은 물리적인 현상과 관계가 있다. 전술한 바와 같이, 연속체 손상역학 기반 접근법을 통해, 임의의 하중 이력을 갖는 재료의 내부 손상 발전은 손상변수 D 로 나타낼 수 있다. 식 (6)에서와 같이, 재료의 강성저하 현상은 소성변형을 증가시키는 D 의 증가량에 의해 특성지어질 수 있다. 본 연구에서는, Lemaitre에 의해 주어진, 등방경화 소성이론을 적용한 손상이론을 사용한다. 등방성 손상발전은 다음 식과 같다⁸⁾.

$$\dot{D} = \left(-\frac{Y}{s_1} \right)^{s_2} \dot{p} \quad (34)$$

$$Y = \frac{-1}{2E(1-D)^2} \left[\frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)\sigma_H^2 \right] \quad (35)$$

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \epsilon_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

여기서,

Y : Strain energy release rate

\dot{p} : Accumulated plastic strain rate

σ_H : Hydrostatic stress

s_1, s_2 : Damage constants

2.4 손상발전방정식의 피로문제 적용

전절에서 손상발전방정식을 피로문제에 적용하기 위해, 점증형 발전식의 형태로 표현된 식 (34)를 단위 하중당 손상발전식으로 변형하여 해당 사이클에 해당하는 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial D}{\partial N} = \left(-\frac{1}{s_1} \frac{A}{2E(1-D)^2} \right)^{s_2} B^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

$$A = \frac{2}{3} (1+\nu) \Delta\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu) \Delta\sigma_H^2 \quad (38)$$

$$B = \frac{2}{3} \Delta\epsilon_{ij} \Delta\epsilon_{ij} \quad (39)$$

$$\Delta\sigma_H = \frac{1}{3} \Delta\sigma_{eq} \quad (40)$$

여기서,

$\Delta\sigma_{eq}$: Stress amplitude per one cycle

$\Delta\varepsilon_{ij}$: Strain amplitude per one cycle

경계조건은 $N=0$ 일 때 $D=0$ 이고, $N=N_{cr}$ 일 때 $D=D_{cr}$ 이다. D_{cr} 은 응력-변형률 선도에서 σ_T 에 해당되는 시점에서의 손상변수 값이다. 전술한 경계조건을 이용하여 식 (37)에 대한 양변 적분을 수행하면 다음과 같다.

$$\int_0^{D_{cr}} (1-D)^{2s_2} dD = \int_0^{N_{cr}} \left(\frac{A}{2s_1 E}\right)^{s_2} B^{\frac{1}{2}} dN \quad (41)$$

$$N_{cr} = \frac{1}{2s_2 + 1} \left[1 - (1 - D_{cr})^{2s_2 + 1}\right] \left(\frac{A}{2s_1 E}\right)^{-s_2} B^{-\frac{1}{2}} \quad (42)$$

3. 재료의 피로수명 예측

김형식은 LNG저장탱크의 멤브레인용 국산 STS304 스테인리스강의 고주기피로 특성 평가를 위해 인장피로 시험을 수행하였다⁹⁾. 이 피로시험의 결과와 시뮬레이션에 의한 피로곡선을 그림 4에서 비교하였다. 그리고 시험시편의 재료 물성치와 재료정수는 표 1과 같다.

한편, 향후의 연구에서는, 본 연구 기법의 확장 및 유한요소해석과의 연계 기술 개선을 통하여 용접부 및 복잡한 구조물의 피로수명예측을 수행할 예정이다.

4. 결 론

본 연구에서는 재료의 피로수명 예측문제에 관하여 연속체 손상역학을 이용한 수치 피로시험기법을 적용하여 정량적인 피로수명을 예측하였으며, 그 결과를 실험

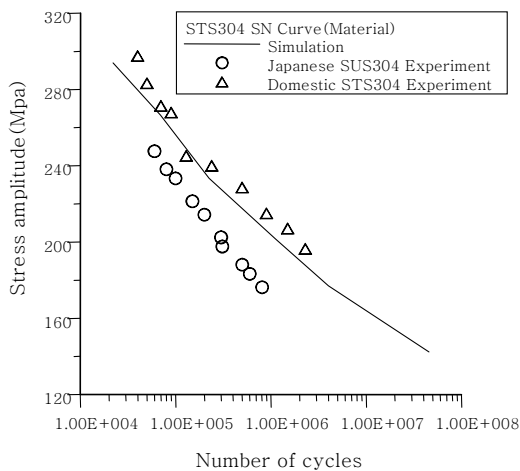


Fig. 4 Comparison of S-N relationship between numerical simulation and experiments⁹⁾

Table 1 Material properties and constants of damage evolution equation for specimen at $T=20^\circ\text{C}$

| STS 304 Stainless Steel | |
|-------------------------------|-----------|
| Yield stress (MPa) | 231.0 |
| Ultimate stress (MPa) | 550.92 |
| Fracture strain | 0.675 |
| Young's modulus (MPa) | 146860.0 |
| Poisson's ratio | 0.32 |
| Variable K (MPa) | 611.4697 |
| Variable N (MPa) | 3.822706 |
| Elastic limit(k) (MPa) | 207.9000 |
| Isotropic hardening(Q1) (MPa) | 23.1 |
| Isotropic hardening(Q2) (MPa) | 319.92 |
| Isotropic hardening(b) | 5.558768 |
| Thermal expansion | 1.475E-06 |
| Damage constants(s1) (MPa) | 1.848 |
| Damage constants(s2) | 4.6 |

결과와 비교하여 사용 기법의 적합성과 유용성을 검증하여 보았다. 이하에 결론을 요약하면 다음과 같다.

1) 재료 고유의 물성치와 손상역학 기반 구성방정식 계로부터 유도된 재료정수를 이용하여 수치적인 기법으로 재료의 피로수명을 정확하게 예측하였다.

2) 유용성의 검증이 다양한 분야에서 이루어지고 있음에도 불구하고 재료정수 선정의 난점으로 인하여 적용상의 제약을 지니고 있는 손상역학 기법에서 물리적인 현상에 근거한 이론적 접근을 바탕으로 비선형 재료정수 도출과정을 수립하였다.

3) 다양한 적용범위를 가지고 있는 손상역학 기법의 피로문제에서의 유용성을 검증하였으며, 막대한 시간과 비용이 소요되는 피로 성능 평가 분야에서 고효율·비용절감형 예측기법으로서의 유용성을 확인하였다

4) 본 연구에서 개발한 해석법은 재료의 피로성능 평가에 매우 유용하게 활용될 수 있을 것으로 보인다.

후 기

본 연구는 부산대학교 교내 지원 연구비에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

1. L. M. Kachanov : Introduction to Continuum Damage Mechanics, Martinus Nijhoff Publishers, 1986, 1-10
2. Jae-Myung Lee and Yutaka Toi : Elasto-Plastic Damage Analysis of Functionally Graded Materials Subjected to Thermal Shock and Thermal Cycle, JSME International

- Journal, Series A, 45-3 (2002), 331-338
3. Jae-Myung Lee : A Study of Computational Mechanics of Thermal Damage Problem for Structural Members, Ph.D. Dissertation, University of Tokyo, 1999 (in Japanese)
 4. Dunne. FPE and Hayhurst. DR : Continuum Damage based Constitutive Equations for Copper under High Temperature Creep and Cyclic Plasticity, Proceeding of Royal Society London, 437-1901 (1992), 567-589
 5. Furukawa. T and Yagawa. G : Parameter Identification of Inelastic Constitutive Equations using an Evolutionary Algorithm, Proc. of ASME/JSME Pressure Vessels and Piping Conference, PVP-Vol 305 (1995), 347-444
 6. Naser Mostaghel and Ryan A. Byrd : Inversion of Ramberg-Osgood Equation and Description of Hysteresis Loops, International Journal of Non- Linear Mechanics, Vol. 37 (2002), 1319-1335
 7. J. Lemaitre and J. L. Chaboche : Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, 1994, 162-168
 8. J. Lemaitre and J. L. Chaboche : Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, 1994, 346-450
 9. Hyoung-Sik Kim : The Evaluation of Mechanical Properties and Fatigue Life for Domestic 304 Stainless Steel Used as Membrane Material in LNG Storage Tank, Journal of The Korean Society of Mechanical Engineers, A. 25-10 (2001), 1644-1650 (in Korean)
 10. Jean Lemaitre : A Course on Damage Mechanics (2nd Edition), Springer, 1996, 39-50
 11. Jae-Myung Lee and Dong-Ryul Yoon : Development of Numerical Method for Assessment of Crack Initiation in Welded Joint, Journal of The Korean Welding Society, 20-2 (2002), 27-31 (in Korean)
 12. Jae-Myung Lee et al., Health Monitoring of Weldment by Post-processing Approach using Finite Element Analysis, Journal of Ocean Engineering and Technology, 16-4 (2002), 32-36 (in Korean)