

研究論文

大韓熔接學會誌  
第8卷 第1號 1990年 3月  
Journal of the Korean  
Welding Society  
Vol.8, No.1, Mar., 1990

## 오스테나이트계 스테인레스강의 마찰압접시 압접조직과 열적거동에 관한 연구\*

강춘식\*\* · 정태용\*\*\*

### A Study on Welding Structure and Thermal Behavior in Friction Welding of Austenitic Stainless Steel

C.S.Kang\*\*, T.Y.Chung\*\*\*

**Key Words :** Continuous Friction Welding(정속 마찰 압접), Transient Temperature(순간 온도), Burn-off Length(마찰 줄음 길이), Heating Pressure(가열 압력), Upsetting Pressure(업셋 압력), Heating Time(가열 시간), Upsetting Time(업셋 시간)

#### **Abstract**

The transient temperature distribution in the continuous friction welding of 304 stainless steel bars is investigated by experimental and analytical methods.

It is calculated by F.D.M.(finite difference method). The heating pressure, the rotational speed and friction coefficient obtained from experiment are used to determine the heat input at the contacting surface.

Thermal properties of the workpiece are the function of temperature.

The calculated temperature is well coincided with the measured value.

The grain size at weld interface is extremely small due to the severe plastic deformation at high temperature, and result of this refined zone reveals higher hardness value.

Because the HAZ is very narrow about 2-3 mm, welding defects do not occur.

---

\* 89년 대한용접학회 춘계학술대회 발표

\*\* 정회원, 서울대학교 금속공학과

\*\*\* 정회원, 동양공업전문대학 공장자동화과

## I. 서 론

마찰압접은 두 가공물의 계면에서 면간 마찰의 기계적 에너지를 직접 열에너지로 바꾸어 용접에 필요한 열원을 얻는 방법으로서<sup>1)</sup> 마찰계면에서 발생하는 마찰열은 짧은 시간에 가공물의 마찰면 표면온도를 고온에 이르게 하고 용접은 가열영역에 압력을 가하므로서 소성온도구역에서 이뤄지게 된다<sup>2)</sup>.

마찰압접시 압접제품의 강도를 좌우하는 것은 주로 업셋 가압시 접합계면과 그 부근의 온도분포와 업셋압력이므로 마찰계면의 온도분포를 아는 것은 압접조건의 설정에 매우 중요하나 극심한 소성변형에 의한 계면의 이동으로 마찰계면의 온도를 직접 측정하는 것은 불가능한 일이다.

따라서 미찰계면의 온도를 이론적으로 구하고자 많은 노력이 있어왔으나 정확한 방법은 아직 보고되어 있지 않은 실정이다.

본 연구에서는 축 및 스크류(screw)부품 벨브 및 그 부속품, 기어 및 로울러, 공구류 등의 마찰압접 가공에 그 용도가 매우 넓어지고 있는 오스테나이트계 스테인레스 강을 마찰압접시켰을 때 업셋 가압직전의 마찰계면과 그 주변의 온도분포를 수치해로서 계산에 의하여 구하였다.

여러 압접조건 하에서 측정가능한 부위의 온도를 실측에 의해 구하여 수치해에 의한 온도값과 비교하였고 등온곡선도를 구하였다.

## 2. 이론해석

### 2.1. 열전달방정식에 의한 온도 계산

환봉형상의 압접물의 마찰계면 주변의 온도장을 얻기 위한 비평형상태의 열전달방정식은 환봉의 접촉계면 중심부에서 반경방향으로  $r$ , 접촉계면에서 소재의 길이방향으로  $z$ 좌표를 설정하면 다음과 같이 표시된다.

#### 2.1.1. 소성변형전

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1)$$

#### 2.1.2. 소성변형중

소재가 가열압축에 의해 소성변형되어 좌표이동을 가져오게되고 이때 전 절점과 후 절점사이엔 열량차가 생기게 된다.

발열계면 이동을 고려한 절점의 열량값은  $q = \rho \cdot C \cdot U \cdot T \cdot A$ 로 쓸 수 있고 좌표이동에 따라 한 절점에서의 열량보정값은 Fig. 1과 같이 직각좌표계의  $x$ 방향기준으로

$$q_c = \rho \cdot C \cdot U \cdot T \cdot dy \cdot dz - \rho C (U + \frac{\partial u}{\partial x} dx) \cdot (T + \frac{\partial T}{\partial x} dx) dy \cdot dz \quad (2)$$

로 표시된다.

단,  $\rho$  : 밀도 [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$C_p$  : 비열 [ $\text{kJ}/\text{kg K}$ ]

$U$  : 이동속도 [ $\text{m/sec}$ ]

$T$  : 온도 [K]

따라서  $x$ 방향에 대한 energy balance는 전도에 의한 열량과 열량보정값을 고려하면 다음 식으로 표시된다.

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} dy \cdot dz - \left( -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right) \right) dy \cdot dz + \rho CUT dy \cdot dz - \rho C \left( U + \frac{\partial U}{\partial x} dx \right) \cdot \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dx \cdot dy \cdot dz \quad (3)$$

$y$ 방향에서  $U$ 를  $V$ 로,  $z$ 방향에서  $U$ 를  $W$ 로 표현하여 종합하면

$$-\rho C \left( \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) + T \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right) dx \cdot dy \cdot dz + k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] dx \cdot dy \cdot dz = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dx \cdot dy \cdot dz \quad (4)$$

연속방정식을 이용하면

$$-\rho C \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) + k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

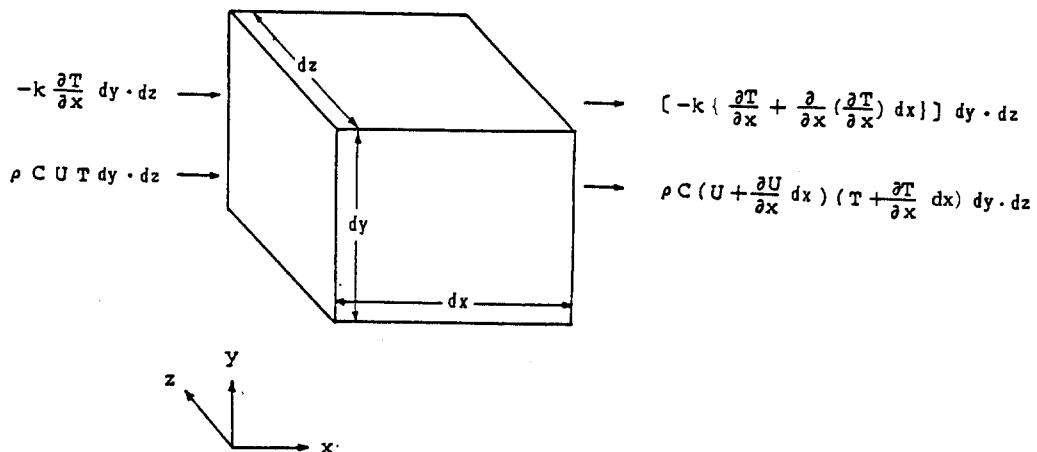


Fig. 1 Schematic drawing of energy balance

동심원상에서는 동일온도값을 가지는 것으로 가정하여 (5)식을 축대칭 원통좌표로 바꾸면

$$\begin{aligned} & \alpha \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} + U_r(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6)$$

로 표시된다.

### 3. 실험방법

#### 3. 1. 압접기 및 계측기구

본 연구에 사용된 마찰압접기는 수평형태의 NSF-30H 브레이크식 정속회전 마찰압접기로서 발열 및 업셋을 위한 가압장치는 유압장치를 사용

하였고 압축속도는 고정축 테이블의 이송장치 이동거리를 측정하여 계산하였다(Fig. 2).

가열과정중의 토오크를 측정하기 위하여 Fig. 3

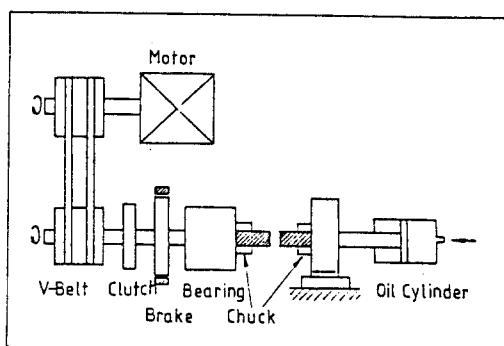


Fig. 2 A brake type friction welding machine

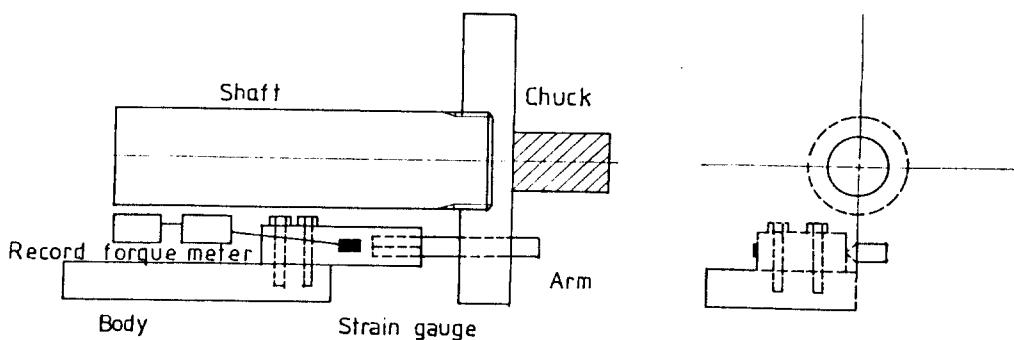


Fig. 3 Schematic diagrams of a torque measuring equipment

과 같이 고정축에 검출장치를 부착시켜 암(arm)에 전달된 정상상태의 토오크를 스트레인 게이지를 통해 토크미터(DS6/RJ 형) 기록장치를 이용하여 산출하였다.

시편은 304 스테인리스강으로 Table 1과 같은 조성의 환봉을 표면상태의 영향을 줄이기 위해 표면조도  $15 \mu\text{m}$  이내로 면가공을 한 후 정속회전 2400 rpm, 압접조건은 Table 2와 같이 넓은 범위에서 마찰압접을 실시하였다<sup>3)</sup>.

Table 1 Chemical compositions of base metal

Chemical compositions (Wt %)						
C	Si	Mn	P	S	Ni	Cr
0.068	0.50	1.66	0.032	0.027	8.63	18.12

Table 2 Friction welding conditions

Size (mm)	$\phi 20 \times 150 \times \phi 20 \times 150$
Heating pressure ( $P_h$ : MPa)	39.2~156.8
Upsetting pressure ( $P_u$ : MPa)	39.2~235.2
Heating Time ( $T_h$ : sec)	2~20
Upsetting Time ( $T_u$ : sec)	3
N (r. p. m.)	2400

### 3.2. 온도측정

마찰면 주변의 온도측정을 위해 고정축 모재에 측방향으로 Fig. 4와 같이 지름 1.2 mm  $\phi$  드릴로 계면에서 7-15 mm 떨어진 위치에 5 mm H, 10 mm H 깊이의 구멍을 뚫어 저부에 직경 0.7 mm 의 CA열전대를 고정시켰다.

이때 각 시편의 한군데만 구멍을 뚫어 측정함으로써 드릴 구멍에 의한 열전달의 영향을 없앴고, 가열과정중 각 위치의 열사이클을 디지털 온도계와 자동온도계로 측정 및 기록하였다. 냉접점은 기준점의 온도를  $0^\circ\text{C}$ 로 보정하였다.

마찰계면 주위의 온도를 측정하기 위해서 방사식 이색 온도계(two color pyrometer)를 사용하여 피측정면에서 1 m 떨어진 위치에서 Fig. 5와 같이 측정면적  $5 \times 5 \text{ mm}^2$ 로 측정면적내 최고온도를 마찰면 외 원주부의 온도로 측정하였다.

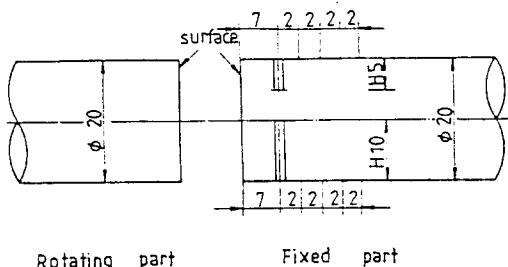


Fig. 4 Location of drill holes for thermocouples

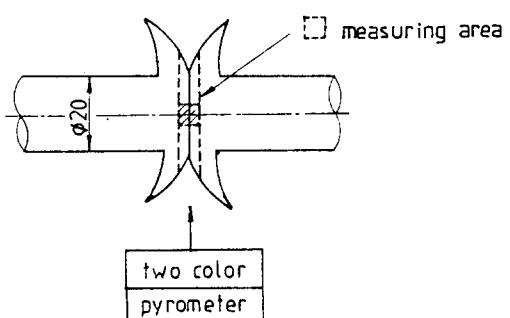


Fig. 5 Diagram of measuring temperature at the weld interface by a non-contact method

### 3.3. 조직검사

시편을 연마후 중크롬산 용액으로 전해부식후 광학현미경으로 접합계면의 조직을 관찰하였다.

접합계면의 용융 및 합금층 형성, 석출물의 존재 등을 조사하기 위해 JEOL JEM-200CX의 투과전자현미경을 이용하여 압접계면의 조직을 검토했다.

접합면 부근의 조직과 관련하여 열영향부를 조사하기 위해 미소경도계로서 하중 200g을 15 sec 동안 가하여 축 중심부 및 중간부를 0.1 mm 간격으로 조사하였다.

### 4. 마찰면과 그 부근의 온도계산

#### 4.1. 가정

마찰면 주변의 온도장을 계산하기 위하여 실제 현상과 잘 부합될 수 있게 다음과 같은 가정을 설정하였다.

## (1) 열이동 및 소성유동에 관한 가정

- 발열은 접촉 계면에서만 일어난다고 보며 열의 이동은 내부에서는 전도, 대기와 접하는 주위는 대류와 복사현상이 발생한다.
- 접촉소재의 열분배는 고정축과 회전축 양축이 동일하며 축방향 단면의 중심원상으로는 동일 온도분포로 된다.
- 소재의 마찰계면에서 소성변형과 용융을 함께 고려하였다.

## (2) 열 물성치에 대한 가정

- 열전도도( $k$ ), 열확산계수( $\alpha$ ), 비열( $C_p$ ), 열전달계수( $h$ )등은 온도의 함수로 본다.
- 밀도( $\rho$ )는 일정한 값으로 본다.

## (3) 초기 및 경계조건에 대한 가정

- 마찰소재의 초기온도는 전 부위가 균일하게 상온상태로 본다.
- 마찰계면, 축 중심선, 축 끝쪽에서의 열이동은 없는 것으로 한다.
- 두 소재의 경계면은 완전 접촉상태로 본다.

## 4.2. F.D.M. 모델과 초기 및 경계조건

환봉의 경우 접합계면과 축을 중심으로 기하학적으로 좌우 대칭이고 대칭면은 단열면으로 볼 수 있으므로 접합계면과 중심축을 좌표축으로 Fig. 6과 같이 모델을 설정하였다.

$z$ 방향으로 10개의 절점,  $r$ 방향으로 10개의 절점을 1 mm간격으로 택하였고 이때 초기 및 경계조건은 다음과 같다.

초기조건은

$$T(r, z) = T_{\infty} \quad (7)$$

경계조건은

$$\textcircled{1} \text{ 계면에서 } -k \frac{\partial T}{\partial z} = q \quad (8)$$

$$\textcircled{2} \text{ 축 중심과 소재 끝에서는}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=l} = 0 \quad (10)$$

$$\textcircled{3} \text{ 주위에서}$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T_s - T_{\infty}) + \epsilon \sigma_B (T_s^4 - T_{\infty}^4) \quad (11)$$

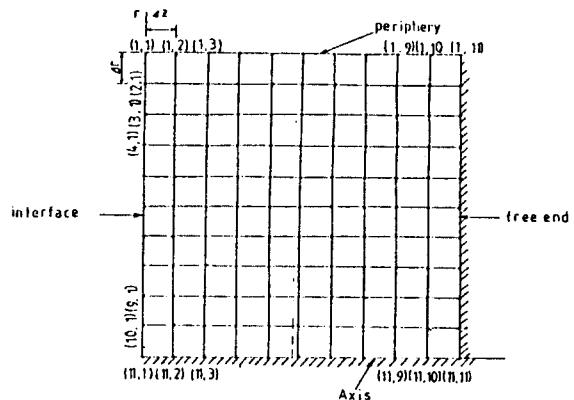


Fig. 6 Grid network and boundary conditions

단,  $h$ : 열전달계수,  $T_s$ : 소재의 주위 표면온도,  
 $\epsilon$ : 방사율,  $\sigma_B$ : Boltzmann 상수,  
 온도분포의 계산을 위해 열전달방정식 (1)식과  
 (6)식을 차분화시키면

$$\begin{aligned} T_{m,n}^{t+1} = & T_{m,n}^t + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} \left[ \frac{21-2m}{22-2m} T_{m-1,n}^t \right. \\ & + \left. \frac{23-2m}{22-2m} T_{m+1,n}^t - 2T_{m,n}^t \right] \\ & + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta z)^2} [T_{m,n-1}^t + T_{m,n+1}^t - 2T_{m,n}^t] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T_{m,n}^{t+1} = & T_{m,n}^t + \frac{\alpha \Delta t U_z}{2 \Delta z} [T_{m,n+1}^t - T_{m,n-1}^t] \\ & + \frac{\alpha \Delta t U_r(r)}{2 \Delta r} [T_{m+1,n}^t - T_{m-1,n}^t] \\ & + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} \left[ \frac{21-2m}{22-2m} T_{m-1,n}^t + \frac{23-2m}{22-2m} \right. \\ & \cdot T_{m+1,n}^t - 2T_{m,n}^t \left. \right] \\ & + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta z)^2} [T_{m,n-1}^t + T_{m,n+1}^t - 2T_{m,n}^t] \end{aligned} \quad (13)$$

단, 첨자  $m, n$ 은 절점의 위치,  $t$ 는 시간을 나타낸다.

안정화 조건은

$$2\alpha \Delta t \left( \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \leq 1 \quad (14)$$

## 4.3. 열 물성값

열전달에 관계되는 열 물성값들은 온도와 함수 관계를 갖는다.

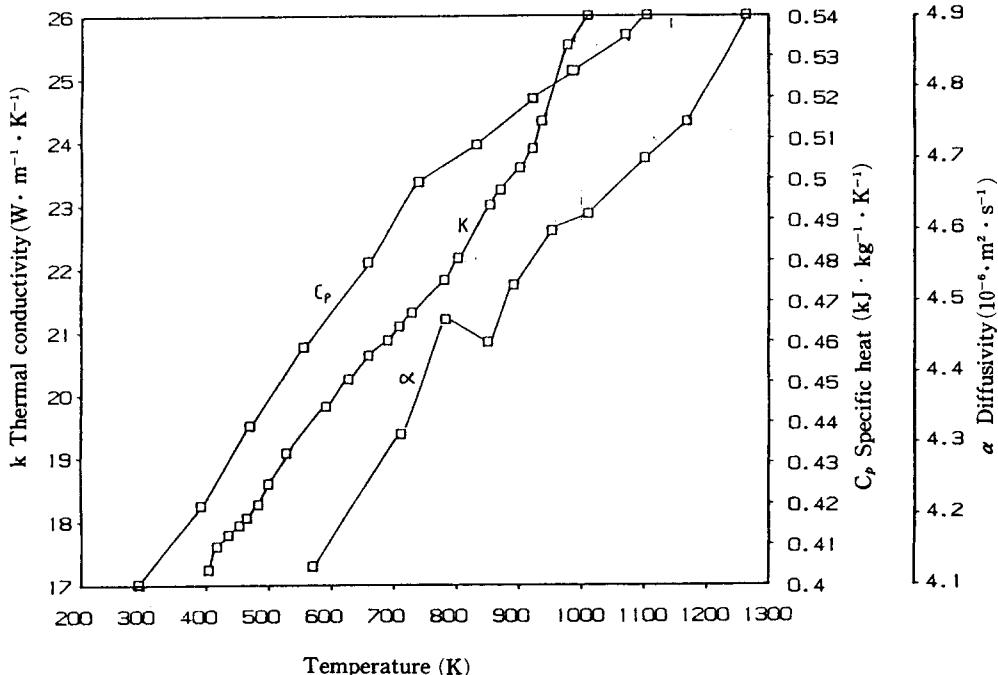


Fig. 7 Variation of thermal properties of type 304 stainless steel

열전도도( $k$ ), 열 확산계수( $\alpha$ ), 비열( $C_p$ ) 등에 관한 온도에 따른 스테인레스강의 물성값은 Fig. 7<sup>4)</sup>에 나타내었고 각 그림에서 얻은 근사식은 다음과 같다.

$$k = 0.013897T + 11.6302 \quad [W/m \cdot K] \quad (15)$$

$$\alpha = (0.000949T + 3.670657) \times 10^{-6} \quad [m^2/s] \quad (16)$$

$$C_p = 0.000186T + 0.351 \quad [kJ/kg \cdot K] \quad (17)$$

$$h = 2.686 \Delta T^{1/4} \quad (18)$$

용융잠열은 계면의 어떤 절점이 국부적으로 용융될 때 그때의 비열  $C_p$ 를

$$C_p = C_p + \frac{L}{T_L - T_s} \quad (19)$$

로 계산하였다<sup>5)</sup>.

단,  $L$ : 용융잠열(301, 1857 kJ/kg)

$T_L$ ,  $T_s$ : 액상선 및 고상선 온도

#### 4.4. 입열량 및 소성변형속도

마찰계면에서 발생하는 마찰열원이 입열량의 근거가 된다.

Fig. 8에서 임의계면부위의 마찰면은

$$q = 2\pi r \cdot \mu P_h \cdot N \quad (20)$$

으로 표시할 수 있다.

식(20)에서 회전수  $N$ 은 2400 rpm이고, 가열압력  $P_h$ 는 유압제어에 의해 일정한 값으로 유지된

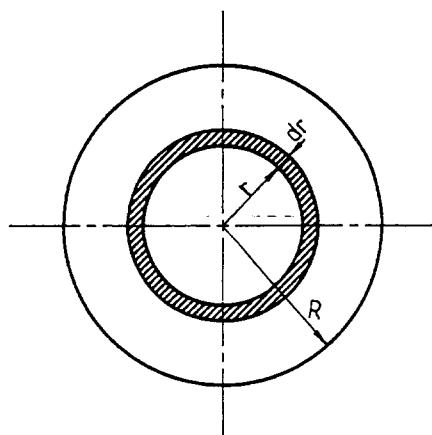


Fig. 8 An elementary area on the friction plane

다. 마찰계면에 작용하는 마찰응력  $\mu P_h$  중  $\mu$  값은 측정된 정상상태의 토크값(Fig. 9)에서 구한 평균마찰계수  $\bar{\mu}$ 로 계산하였다(Fig. 10).

단, 마찰계면중 국부지역이 용융온도에 도달할 경우 그 지역에서의 발열은 없는 것으로 가정하였다.

마찰계면에서 마찰발열에 의해 마찰계면과 그 주위가 소성변형되는 속도는 고정축과 회전축 모두 동일하다고 가정하고 여러 가열압력하에서 소성변형되는 속도를 마찰가열중 매 단위시간마다 암축된 길이로서 산출하였다.

가열압력과 마찰계면과 그 주변의 소성변형속도를 Fig. 11에 도시하였다. 가열압력의 증가에 따

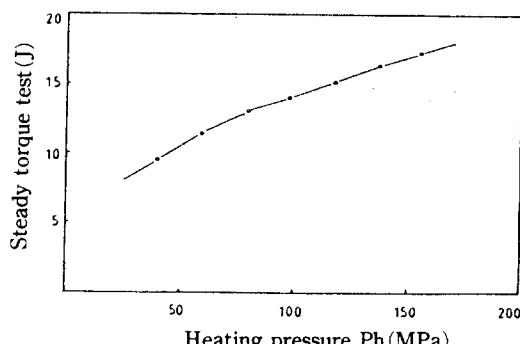


Fig. 9 Relation between steady torque and heating pressure

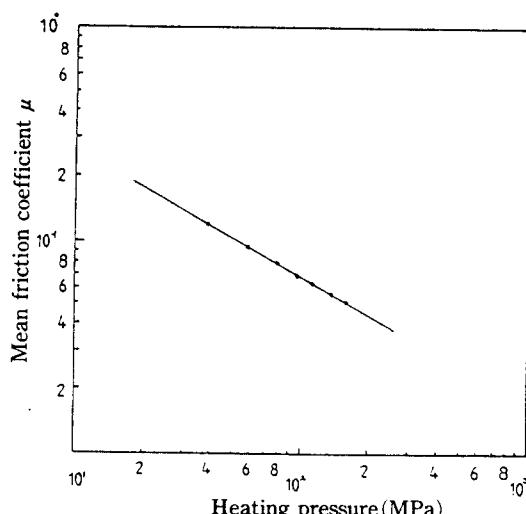


Fig. 10 Relation between mean friction coefficient and heating pressure

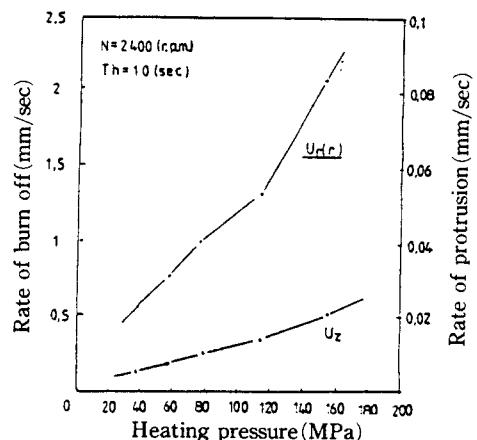


Fig. 11 Relation between the heating pressure, burn-off rate, and protrusion rate

라 소성변형속도가 일정하게 증가하는 것을 알 수 있다.

#### 4.5. 전산프로그램

Fig. 12는 전산프로그램의 흐름도를 나타냈다.

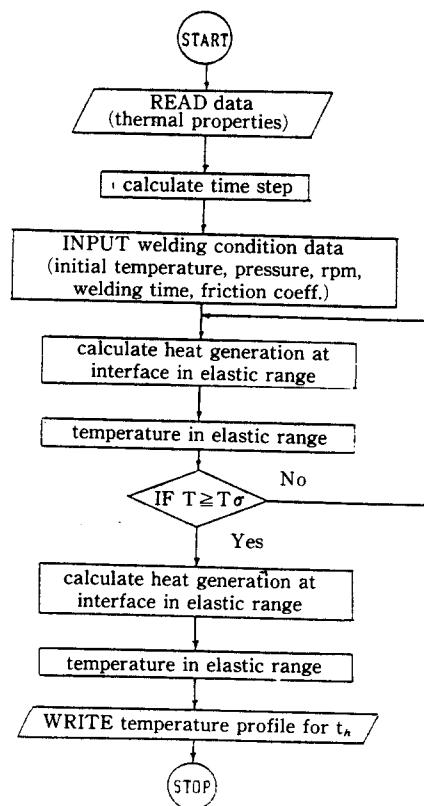


Fig. 12 Flow chart of programming

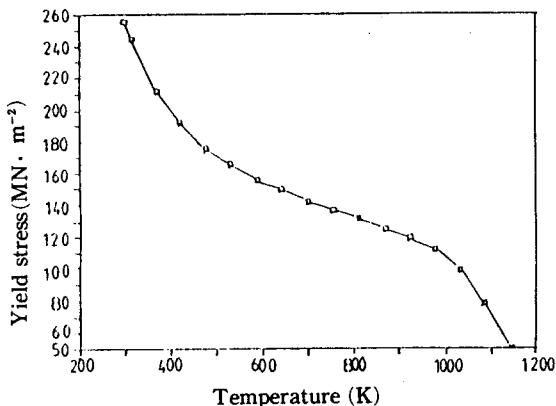


Fig. 13 Relation between the yield stress and temperature of 304 stainless steel

마찰계면 지역이 소성황복온도(Fig. 13)에 도달할 때 전산시 소성변형중의 열전달방정식을 이용하였다.

### 5. 결과 및 고찰

소재의 상대회전이 정지하고 업셋이 완료됨에 의해 압접강도가 결정된다.

압접강도 결정에 가장 영향을 주는 것은 회전정지시의 마찰면 근처의 온도분포이고 정상 토크값 및 압축속도가 정상상태에서는 일정한 마찰계면 온도를 나타낸다.

Fig. 14는 마찰면 근방의 온도 측정값과 전산에 의한 계산값의 비교 결과로서 비교적 잘 일치하고 있다.

Fig. 15는 방사식 이색온도계로 마찰계면 외주부를 측정한 온도값과 방사식 이색온도계의 측정범위가  $5 \times 5 \text{ mm}^2$ 인 점을 감안하여 마찰계면에서 축방향으로 2 mm 위치까지의 계산에 의한 평균온도값을 비교하였다. 측정값과 계산값이 거의 일치함을 보여주었고 마찰계면 온도추정에 방사식 이색온도계가 유용한 수단이 될 수 있음을 보여준다.

Fig. 16은 가열압력을 39.2 MPa에서 156.8 MPa까지 변화시킬 때 각 가열압력과 가열시간 3초 때의 온도분포이다. Fig. 17은 6초 때의 온도분포이다.

계산에 의한 등온곡선도를 통해 이론적으로 최

고온도에 도달하는 시간과 최고온도 및 소성온도 구역의 폭과 온도변화에 대한 상황을 알 수 있고 성공적으로 접합을 얻는데 필요한 용접조건을 조절할 수가 있다.

Photo. 1은 압접후 마찰계면 부위의 조직사진으로서 마찰계면에서 가열압력의 증가에 따라 소성영역이 커지고 소성 및 국부적 용융부가 마찰가열

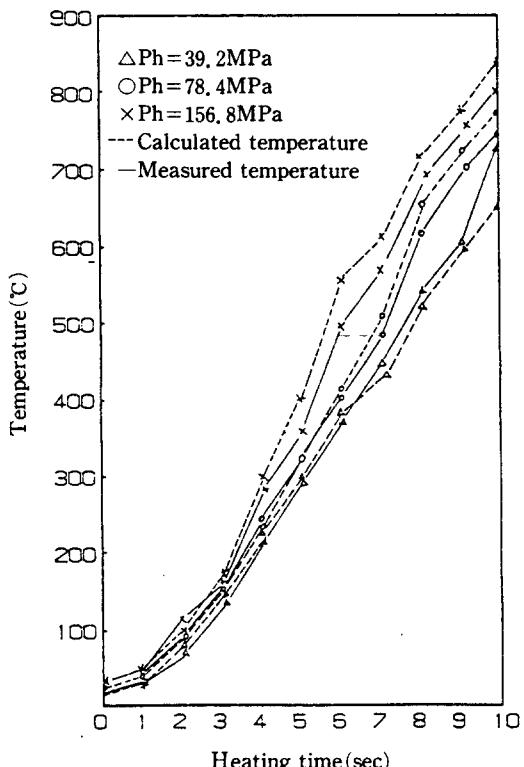


Fig. 14 Comparison of calculated temperature vs. measured temperature for type 304 stainless steel ( $H=5\text{mm}$ )

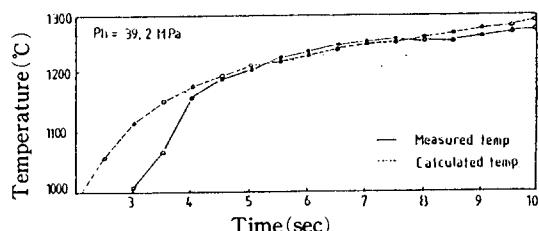


Fig. 15 Comparison of calculated temperature vs. measured temperature by two color pyrometer at the friction interface

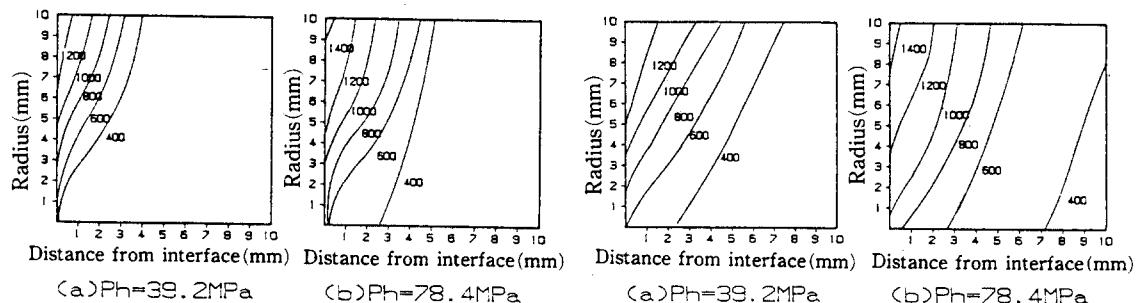
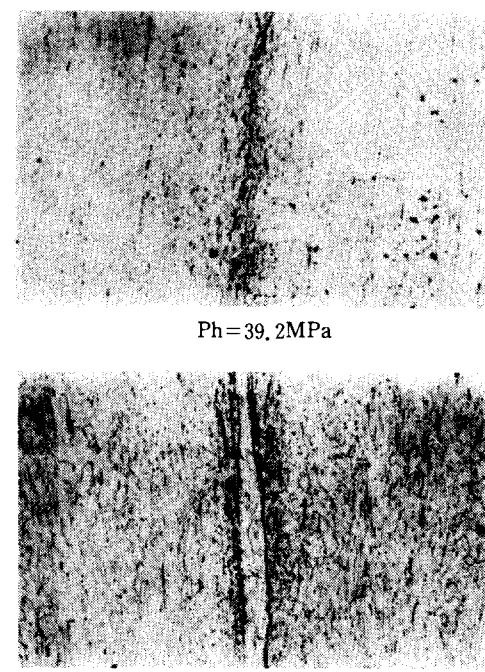


Fig. 16 Temperature distribution(°C) by calculation for the heating time of 3 sec with the variation of heating pressures



$Ph = 39.2 \text{ MPa}$

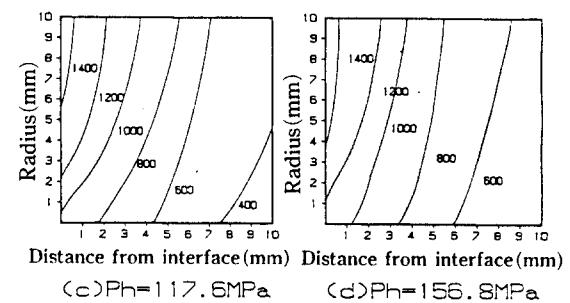
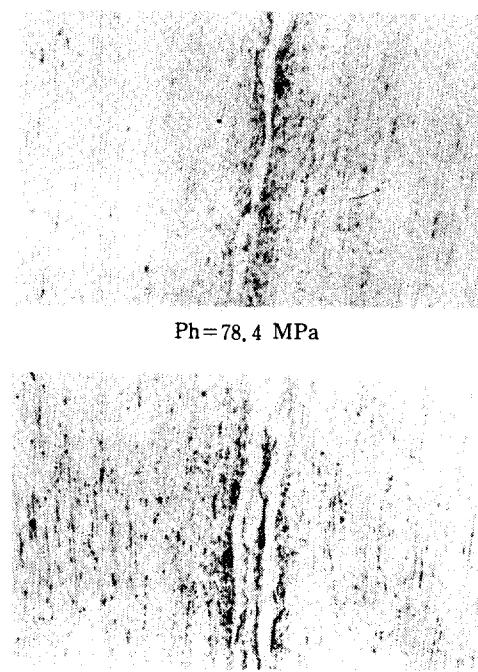


Fig. 17 Temperature distribution(°C) by calculation for the heating time of 6 sec with the variation of heating pressures



$Ph = 78.4 \text{ MPa}$

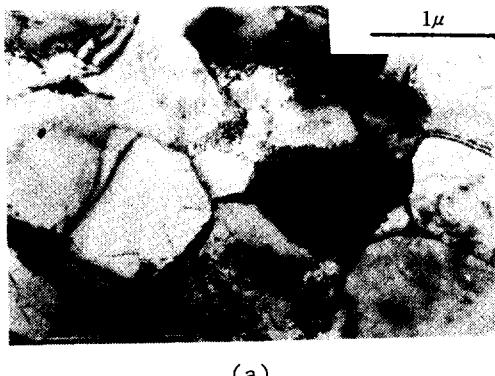
Photo. 1 Microstructures of bonded interface in type 304 stainless steel

증 와류현상을 일으켜 업셋시 표면부의 불순물이 완전히 밀려나갔기 때문에 깨끗한 면끼리 접촉하여 접합된 접합부위를 나타내고 있다.

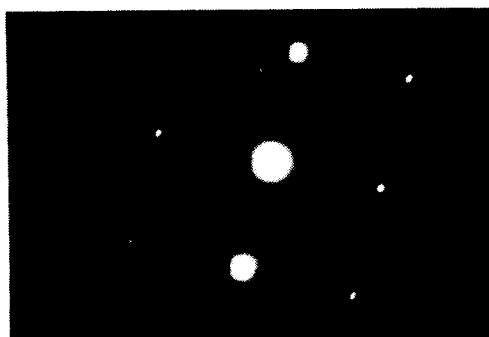
접촉면이 소성변형되어 이동될 때 긴 축방향의 결정립은 접합계면에 평행하게 되며 긴 결정립이 분리되어 미세하고 균일한 결정립이 접합계면 주위에 배열되고 고온에서 극심한 소성변형을 받게되므로 극도로 미세한 재결정조직이 계면주위에 나타난다.

고온변형중에 결정립의 변화는 결정립내에 전위가 상승되어 벽의 형태로 재배열되고 이에따라 작은 블럭으로 분리되어 傾角粒界化를 이룬다.

Photo. 2(a)는 접합계면부의 TEM 사진이며 (b), (c)는 회절무늬와 해석도이다. 회절무늬에 따르면 전체가 아결정립으로 구성된  $\gamma$ -Fe 임을 알 수가 있다.



(a)



(b)

Photo. 2 TEM micrograph and diffraction pattern of bonded interface in type 304 stainless steel

접합계면 주변의 미소경도값을 조사한 결과 Fig. 18과 같았다. 경도가 높은 부위의 폭을 조사해 본 결과 일반 용접법에 의해 열영향을 받는 열영향부 폭보다 훨씬 좁은 2-3 mm 정도로서 마찰압접법은 용접에 의한 결함이 매우 적은 접합방법임을 알 수가 있다.

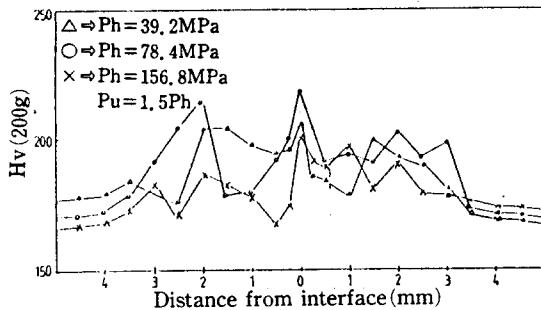
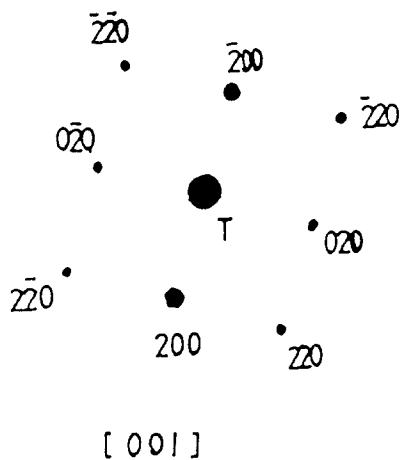


Fig. 18 Hardness distribution near the friction welded interface in type 304 stainless steel ( $H = 10\text{mm}$ )



## 6. 결 론

오스테나이트계 스테인레스 동종 강 간의 마찰 압접을 통하여 마찰계면에서 일어나는 열적변화와 접합조직에 대하여 조사한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

마찰계면과 부근의 온도를 이론적으로 계산하여 등온곡선도를 구할 수 있었다.

등온곡선도를 통해 최고온도에 도달하는 시간과 최고온도 및 소성온도 구역의 폭과 온도변화를 알 수 있다. 성공적 접합을 얻는데 필요한 용접조건을 조절할 수가 있다.

접합계면 조직은 크기  $0.5\text{--}2 \mu\text{m}$ 의 작은 아결정립으로 구성되며 미소경도가 주변보다 높았으며, 용접에 의한 열영향부가 2-3 mm 정도로서 용접에 의한 결함은 거의 없었다.

## 후 기

이 논문은 88년도 한국과학재단 기초연구비에 의해 수행되었습니다. 이에 감사를 드립니다.

## 참고문헌

- 1) A.W.S : Welding Handbook, A.W.S. (1983)  
p. 719
- 2) Vill, V.I. : Friction welding of metals,  
Translated from Russian A.W.S. by the  
Rheinhold Pub. Co., New York, (1962), p.2
- 3) Japan Friction Welding Association : Fric-  
tion welding, Corona. Pub. Co. Ltd., Tokyo,  
Japan, (1979), p. 54
- 4) J.M.Park : The effect of changes in temperat-  
ure under thermo-physical, mechanical and  
optical properties of stainless steels, M.A.  
Thesis, Dankuk University of Seoul, (1979), p.  
61
- 5) B.G.Thomas, I.V.Samarasekera and J.K.Bri-  
macombe : Comparison of numerical modeli-  
ng techniques for complex, two-dimensional,  
transient heat conduction problems, Metall.  
Trans., Vol. 15B, No.2, (1984), pp. 307-318