

열탄소성 해석에 의한 잔류응력의 계산⁺

장 창 두* · 서 승 일**

Calculation of Residual Stresses by Thermal Elasto-Plastic Analysis.

C. D. Jang* · S. I. Seo**

Key Words: Residual Stress(잔류응력), Thermal Elasto-Plastic Analysis(열탄소성 해석), Initial Stiffness Method(초기강성법), Initial Strain(초기변형도), Yield Surface, Image Method(경상법), Loading(부하), Unloading(제하), Stress-Strain Relation(응력변형률관계)

Abstract

Welding residual stresses were calculated by two dimensional thermal elasto-plastic analysis using finite element method. Complicated plastic behavior during heat transfer was simulated with time.

First, temperature distribution was found from welding conditions. To consider time varying behavior of material properties and loading and unloading processes, iterative calculation based on initial stiffness method was carried out. The method proposed by Yamata was used in time increment control which determined the accuracy of calculation. Comparison with other calculated and experimental results shows fairly good agreement.

1. 서 론

구조물의 용접 후에는 반드시 잔류응력이 존재하게 되는데, 이 잔류응력은 좌굴 강도의 저하, 응력 부식 균열, 파괴 강도의 저하 등의 원인이 된다. 이러한 잔류응력의 영향을 파악하고 그에 대비한 설계를 도모하기 위해서는 잔류응력의 크

기와 분포에 대한 지식이 선행되어야 한다.

잔류응력은 용접 중 열전달에 따른 온도 분포의 불균일이 원인이 되어 발생되는데, 복잡한 열탄소성 과정을 거쳐서 최종적으로 나타나게 된다. 재료의 기계적 성질은 온도와 함께 변화되므로 잔류응력의 해석에는 비선형성이 내포되고 있다. 본 연구에서는 열전달 과정에 따른 열탄소성 과정을

⁺1987 춘계학술대회 발표

* 서울 대학교 공과대학 조선공학과

** 코리아 타코마 조선공업 설계부 선각설계과 0551) 55-1181 (교)283

추적하여 최종적인 잔류응력을 구하고자 하였다.

2. 해석의 발전 과정

잔류응력을 해석적으로 구하고자 하는 연구는 이미 오래전부터 수행되어 왔다. 해석적으로 잔류응력을 구하는 방법은 주로 두가지로 크게 나눌 수 있다.^{(3),(8),(10)} 첫째는 소성 과정 해석 수행에 따른 복잡성을 피해보고자 부적합도 (incompatibility)라는 개념을 도입한 탄성해석이다.⁽¹⁰⁾ 이 방법에서는 고유 변형도 (inherent strain)를 용접부 근처에 분포시키고, 이로 부터 구해진 부적합도를 이용하여 탄성해석을 수행한다. 상당히 간편한 방법이지만 고유 변형도의 분포 가정에 큰 난점이 따르게 된다. 둘째 방법은 열전달 과정에 따른 탄소성 현상을 시간에 따라 추적하는 열탄소성 해석이다.⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾ 정확성을 띤 방법이지만 복잡성이 내포되어 있다.

본 연구에서는 후자의 방법을 따르고 있는 바, 후자의 발전 과정을 살펴본다.

초기의 대표적인 것으로 渡邊의 연구¹⁾를 들 수 있다. 여기에서는 細長판의 일차원적 온도 분포를 이용하였고 탄성 영역과 소성 영역을 분리하여 응력을 구하였다. 그 후 Tall²⁾은 細長판에 대해 이차원 온도 분포를 가정하였으나 응력 해석시에는 종방향의 응력만 고려하여 시간에 따른 평형 상태를 추적하였다. 이때부터 전자계산기가 급속히 발달하여 Tall의 연구에 기초를 둔 일차원 탄소성 해석 프로그램이 완성되었다.

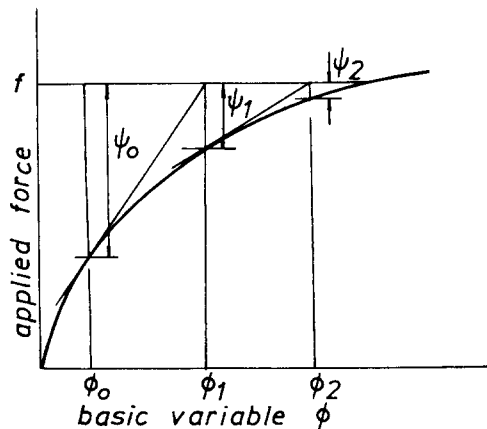


Fig. 1. Tangential stiffness solution algorithm.

유한요소법은 전자계산기의 발달과 함께 계속적인 발전을 거듭하여 열탄소성 분야에도 적용되기 시작하였다. 가상 일의 원리 (principle of virtual work)로 부터 이차원 해석 방법이 확립되었다. 이차원 유한요소법의 적용시에는 접선 강성법 (tangential stiffness method)과 초기 강성법 (initial stiffness method)이 이용된다.⁽³⁾⁻⁽⁶⁾ Fig. 1에는 접선 강성법 과정이 묘사되어 있는데, 이 방법에서는 기울기를 나타내는 강성이 계속적으로 변화하지만 수렴 속도가 빠르다는 장점이 있다. Fig. 2에는 초기 강성법이 묘사되어 있는데, 수렴 속도는 느리지만 강성이 처음 상태 그대로라는 간편함이 있다.

이차원 열탄소성 해석에 관한 연구는 藤田, 野本³⁾을 선두로 지속되어 왔다. 野本은 초기 응력을 도입하여 문제의 정식화를 하였는데, 결과적으로는 접선 강성법을 이용한 셈이었다. 비슷한 시기에 上田⁴⁾에 의해 같은 종류의 연구가 이루어졌다. 上田는 접선 강성법을 이용하였으나, 증분 제어 (control)에 있어서 山田의 방법⁵⁾을 이용하였다. Masubuchi⁶⁾도 일차원 해석을 시발로 하여 이차원 탄소성 해석을 수행하였다. 열전달 과정에서 열전도 계수들의 온도에 따른 변화를 고려하기 위해 반복법을 이용하고 있다.⁷⁾ 藤田등은 열탄소성 해석을 지속적으로 연구하여 초기 변형도를 가정하여 초기 강성법을 이용한 과정을 제안하였다. 또한, 증분의 2차항을 고려한 시간 증분 제어법을 제안하였다. 제안한 방법에는 탄성계수의 온도에 따른 변화를 고려하지 않았다.⁸⁾

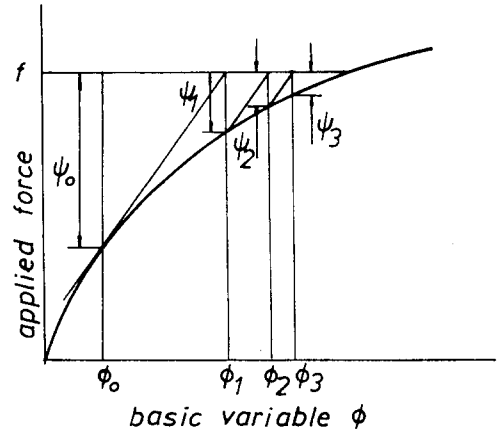


Fig. 2. Initial stiffness solution algorithm.

본 연구에서는 탄성 계수의 온도에 따른 변화를 고려한 초기 변형도를 구하고, 초기 강성법에 바탕을 둔 정식화를 도모하여 초기 변형도에 바탕을 둔 초기 강성법에서도 탄성 계수의 온도의존성이 고려될 수 있음을 보였다. 시간 증분에 있어서는 山田의 방법을 이용하였다.⁽⁶⁾

3. 초기 변형도법에 의한 정식화

용접 중에는 용접 비드를 중심으로 열이 전달되어 모재 내에서 온도 분포 구배(gradient)가 생기게 되고 인접한 부분과의 서로 다른 팽창, 수축에 의해 응력이 유발된다. 또한 용접부는 고온 상태에 놓이게 되므로 용융 상태에 있고 소성 변형이 발생하게 된다. 이와 같은 현상을 수치적인 해석 모델에 반영하기 위해 초기 변형도(initial strain)라는 개념을 도입한다. 초기 변형도에는 온도 차이에 기인하는 열 변형도와 응력이 항복점을 넘어섰을 때 나타나는 소성 변형도가 포함된다. 용접 과정 중에는 소성 변형이 포함되므로 소성 이론의 도입이 불가피하게 되는데, 소성 이론은 증분형의 형태로 표시된다. 가상 일의 원리로 부터 초기 변형도가 존재하는 물체에 대해서는 다음의 증분형 평형 방정식이 성립된다. 유도 과정은 부록 1에 나타나 있다.

$$[K]\{du\} = \{dFe\} + \{d\bar{F}\} + \{d\bar{x}\} \quad (1)$$

여기서

$$[K] = \int_v [B]^T [D] [B] dv : \text{강성행렬}$$

$$\{dFe\} = \int_v [B]^T [D] \{d\epsilon_0\} dv : \text{등가절점력}$$

$$\{d\bar{F}\} = \int_s \{dF\} ds : \text{표면력}$$

$$\{d\bar{x}\} = \int_v \{dx\} dv : \text{체적력}$$

자세한 기호 설명은 부록1에 나타나 있다.

위 방정식에서 볼 수 있듯이 초기 변형도 $\{d\epsilon_0\}$ 는 등가의 절점력과 같은 역할을 하게 된다. 또한 강성 행렬은 증분 구간 내에서는 변하지 않음을 알 수 있다.

4. 초기 변형도의 유도

앞에서 언급한 바와 같이 용접 중에는 탄소성 과정이 반복된다. 소성 영역은 부하(loading) 상태 뿐만 아니라 제하(unloading) 상태를 반복 경험하고 있다. 소성 과정을 기술할 수 있는 이론에는 여러 가지가 있는데, 본 연구에서는 증분형으로 표시되는 Prandtl-Reuss식을 이용하기로 한다. 초기 변형도는 소성 이론을 도입한 응력-변형도 관계로 부터 얻어질 수 있다.

소성 변형도 증분은 Prandtl-Reuss 관계식으로부터 (2)식과 같이 표시된다.

$$d\epsilon_{ij} = S_{ij} \cdot d\lambda \quad (2)$$

여기서 $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij}$ 으로 편차응력이

다. 재료의 온도 의존성을 고려한 항복 조건식은 (3)식과 같은데, 항복 조건식으로부터 $d\lambda$ 가 구해진다. 상세한 유도 과정은 부록2에 나타나 있다.

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_y(T) \quad (3)$$

$$\text{여기서 } \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} \cdot S_{ij}}$$

σ_y = 항복 응력

T = 온도

$d\lambda$ 에 의해 부하·제하가 판정되고 제하 과정 이후에는 탄성 상태가 된다.

$d\lambda > 0$: 부하(loading)

$d\lambda = 0$: 중립

$d\lambda < 0$: 제하(unloading)

탄성 변형도 증분, 열 변형도 증분, 소성 변형도 증분을 포함한 응력-변형도 관계는 결국 다음 식으로 표시된다.

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \cdot d\epsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot d\epsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + \frac{dE}{1+\nu} \cdot \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{aligned} & \cdot dE \cdot \epsilon_{kk}^e \cdot \delta_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} \cdot (dE \cdot \alpha \\ & \cdot T + E \cdot d\alpha \cdot T + E \cdot \alpha \cdot dT) - \frac{E}{1+\nu} \\ & \cdot S_{ij} \cdot d\lambda \end{aligned} \quad (4)$$

(4)식의 유도 과정은 부록3에 기술되어 있다.
(4)식은 (5)식과 같은 행렬 형태로 표시될 수 있다.

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\epsilon - d\epsilon_0\} \quad (5)$$

$\{d\epsilon_0\}$ 가 초기 변형도 행렬이 된다.

藤田, 長谷川の 초기 변형도법 정식화[8]에 따르면 탄성계수의 온도의존성이 고려될 수 없는데 비하여, 초기 변형도 $\{d\epsilon_0\}$ 을 부록(A, 13)과 같이, $d\epsilon_{ij}$ 를 제외한 나머지로 가정하면 초기 변형도를 도입한 초기 강성법에 탄성계수의 온도의존성이 고려될 수 있게 된다.

5. 온도 분포

Rosental은 용접 중 온도 분포를, 준정상 상태 (quasi-stationary state)의 이동 열원(moving source)에 대해서 구하였다.⁽⁹⁾ Rosental에 의해 유도된 식은 3차원 무한 평판이거나 반 무한(semi-intinite) 판에 대한 결과이다. 그런데, 실제의 용접 모델은 유한한 두께를 가진 판이 대부분이고, 판의 표면에서는 열의 발산(radiation)이 일어난다. 열의 발산은 보통 미소한 양이므로 무시한다. 표면에서 열의 발산을 무시하게 되면 표면에서 열 유속(heat flux)이 영(zero)이라는 경계 조건이 성립된다. 이 경계 조건은 영상법(image method)을 사용함으로써 만족될 수 있다.

Rosental의 식에 따르면 열원이 특이점이 되기 때문에 열원 근처에서 온도가 무한하게 커진다. 그러나, 실제로는 일정 온도 이상에서 모재가 용융한다. 열원 근처의 온도 분포 묘사에 불합리한 점이 있게 되므로 열원의 이동 속도가 평판 내열이 전달되는 속도보다 상당히 빠르다는 가정 아래 순간 열원에 의한 온도 분포식을 이용한다. 무한한 2차원 평판에 순간적으로 열원이 주어졌을 때 온도 분포는 오차 함수(error function)로 표현된다.⁽¹¹⁾

$$\begin{aligned} T = \frac{T_0}{4} \{ & \Phi\left(\frac{x+a}{2\sqrt{kt}}\right) - \Phi\left(\frac{x-a}{2\sqrt{kt}}\right) \} \\ & \{ \Phi\left(\frac{y+b}{2\sqrt{kt}}\right) - \Phi\left(\frac{y-b}{2\sqrt{kt}}\right) \} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$\Phi(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z e^{-u^2} du$$

k = 열확산도 (thermal diffusivity)

T_0 = 초기 온도

t = 시간

경계에서 열 유속이 없다는 경계 조건을 만족시키기 위해 slit형 용접 모델에 대해 Fig.3과 같은 영상(image)을 배치한다. 순간 열원의 온도는 연강(mild steel)의 용융 온도(약 1450°C)로 준다. Fig.3의 온도 분포는 Fig.4와 같이 된다.

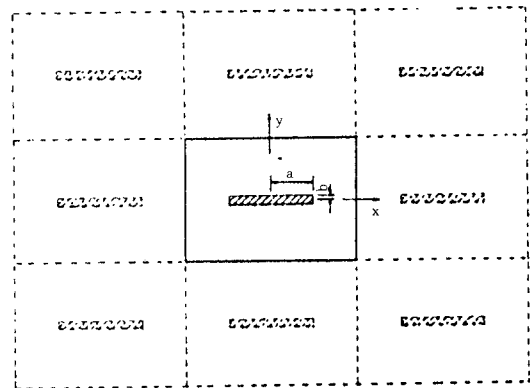


Fig. 3. Image method for allowance of boundary.

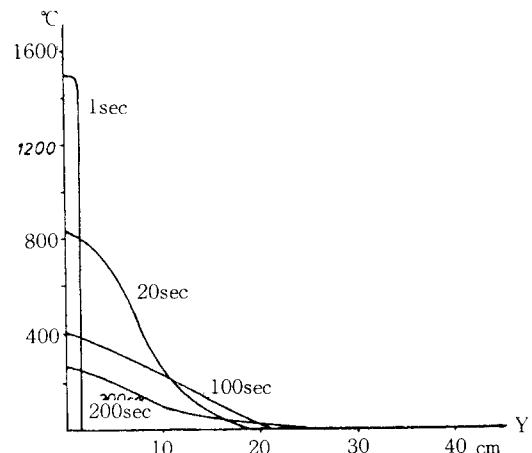


Fig. 4. Temperature distribution of the model along y-axis.

6. 온도에 따른 재료의 기계적 성질 변화

용접 중 열원 근처의 온도는 재료의 용융점 (melting point)까지 도달하게 되므로, 그 주위의 재료는 금속학적 성질이 변화한다. 엄밀히 하자면, 재료의 금속학적 성질의 변화까지 고려하여 잔류응력을 계산해야 정확할 것이지만, 재료의 금속학적 성질의 변화에 대한 영향은 추후의 연구 과제로 남기고, 온도에 따른 재료의 기계적 성질 변화만 고려하기로 한다.

잔류응력 형성에 영향을 미치는 대표적인 기계적 성질은 탄성 계수, 항복 응력, 선팽창 계수 (thermal expansion coefficient)이다. 온도에 따른 성질의 변화는 Fig.5에 도시되어 있다. 실선은 실제 온도에 따른 변화이고⁽¹⁾, 점선은 계산 시에 사용한 이상화된 함수이다.

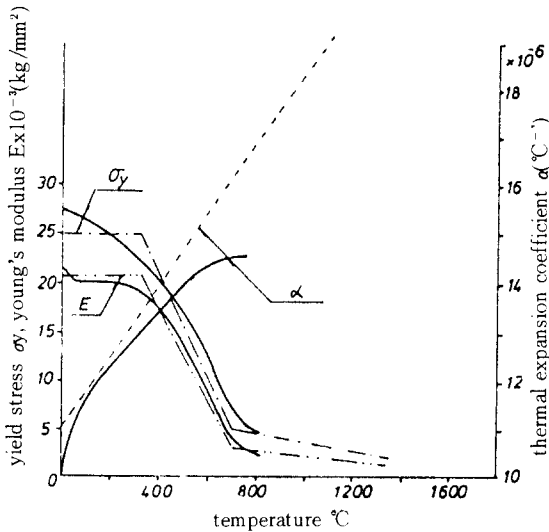


Fig. 5. Change of mechanical property with temperature for mild steel.

7. 시간 증분의 제어

시간 증분의 제어는 해의 정확도에 큰 영향을 미치는 중요한 과정이다. 시간 증분을 제어하는데 여러 방법이 이용되고 있지만⁽⁵⁾⁽⁶⁾, 본 연구에서는 山田의 증분 제어법을 이용한다.

Fig.6에 도시된 바와 같이 시간 증분을 dt로 가정했을 때, 시각 t에서 탄성 상태에 있는 요소가

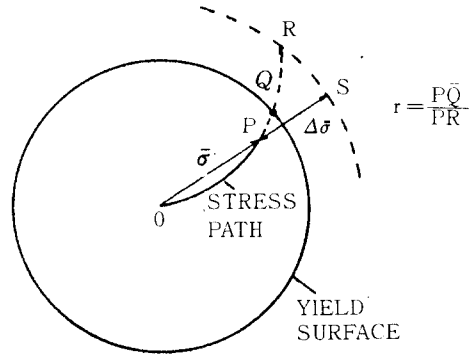


Fig. 6. Control of increment in yield surface.

시각 t+dt일 때 항복 곡면을 초월하는 경우가 생긴다. 이 때는 증분을 r · dt (0 < r < 1)로 놓고 비례 정수 r을 다음 식에서 구한다.⁽⁵⁾

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_x + r \cdot d\sigma_x)^2 - (\sigma_x + r \cdot d\sigma_x)(\sigma_y + r \cdot d\sigma_y) \\
 & + (\sigma_y + r \cdot d\sigma_y)^2 + 3(\tau_{xy} + r \cdot d\tau_{xy})^2 \\
 & = (\sigma_y + r \cdot d\sigma_y)^2 \quad (7)
 \end{aligned}$$

시간이 dt만큼 증가했을 때, 항복 곡면을 초월하는 요소는 다수가 생길 수 있다. 여러 개의 항복 요소 중에서 최초로 항복 곡면을 초월하는 요소가 시간 증분을 지배한다고 생각하여, 구해진 r 값 중에서 최소를 택하고 최소의 r을 갖는 요소만 항복한다고 본다. 시간 증분은 r의 최소치인 r_min에 의해 r_min · dt만큼으로 제어한다. 시간 증분의 수정에 따라 모든 증분을 비례적으로 수정한다.

8. 응력 증분의 조정

시각 t에서 항복 곡면 상에 있는 요소가 시각 t+dt에도 항복 곡면 상에 위치하기 위해서는 다음 식이 만족되어야 한다.

$$f(t) = \bar{\sigma}(t) - \sigma_y(T) = 0 \quad (8)$$

$$f(t+dt) = \bar{\sigma}(r+dt) - \sigma_y(T+dT) = 0 \quad (9)$$

여기서, t=시간
T=온도

(8)식과 (9)식을 풀면

$$(2\sigma_x - \sigma_y) \cdot d\sigma_x + (2\sigma_y - \sigma_x) \cdot d\sigma_y + 6\tau_{xy} \cdot d\tau_{xy}$$

$$-2\sigma_y \cdot d\sigma_y = -[(d\sigma_x)^2 + (d\sigma_y)^2 - d\sigma_x \cdot d\sigma_y + 3(d\tau_{xy})^2 - (d\sigma_y)^2] \quad (10)$$

이 된다.

부록2에서 알 수 있듯이 $d\lambda$ 를 유도하는 과정에서 (10)식에 나타나 있는 증분의 2차항을 무시하였다. 그런데, 수치 계산 과정에서 이 2차항이 조금씩 누적되어 항복 곡면을 이탈하는 결과를 초래하게 된다. 따라서 각 단계마다 증분을 항복 곡면으로 되돌려 주는 작업이 필요하게 된다.

9. 계산의 흐름

지금까지의 과정을 다음의 흐름에 따라 프로그램화 한다.

- a. 가정된 시간 증분에 따라 온도 분포를 계산하고, 그 온도에 따른 재료의 성질을 구하여 강성 행렬을 조립한다. 강성 행렬의 역행렬을 구한다.
- b. 열 변형도 증분을 계산하고 소성 변형도 증분 $d\epsilon_{p0}$ 를 가정하여 등가의 절점력을 계산한다.
- c. 강성 행렬의 역행렬에 등가의 절점력을 곱하여 변형도 증분을 계산한다.
- d. 응력 증분을 계산하고, 탄성 소성을 판정한다. 소성 요소에 대해서는 부하, 제하를 판정하고, 제하 요소는 탄성 상태로 되돌린다. 부하 요소는 소성 변형도 증분을 계산한다. 전 단계에서 탄성 상태인 요소가 현 단계에서 소성 상태일 때는 r 을 구하고, r_{min} 을 구한다.
- e. d에서 구한 $d\epsilon_{p0}$ 가 $d\epsilon_{p0}$ 와 수렴하는 지 판정한다. 수렴하지 않을 때는 $d\epsilon_{p0}$ 을 재 가정하고 b로 돌아간다.
- f. e에서 수렴되었을 때는 r_{min} 에 따라 모든 증

분을 비례적으로 수정한다.

g. 소성 요소에 대해서는 응력 증분의 조정을 실시한다.

h. 최종 시간에 도달할 때까지 반복 계산한다.

10. 계산 결과

본 연구에 따른 이론을 바탕으로 간단한 모델에 대하여 수치 계산을 수행하였다. 재료는 연강을 선택하고, 기계적 성질 변화는 Fig.5와 같다. 대상 모델은 Fig.7과 같은 슬릿(slit) 용접된 평판이고, 용접 조건으로 용접 입열이 $Q=4200\text{cal/cm}^2$ 이 주어졌다고 한다. 비중 $\rho = 7.8\text{g/cm}^3$, 비열 (specific heat) $c=1.3\text{cal/g}^\circ\text{C}$ 로 하고, 순간 열원의 온도는 1450°C 로 한다. Fig.8은 해석을 위한 유한 요소 모델이다. 대칭성으로 인해 $\frac{1}{4}$ 만 모델화하는 것이 가능하다. 藤本의 실험 결과⁽¹⁰⁾와 비교하여 보면, Fig.9,10에서 볼 수 있듯이 양호한 상관 관계가 있다.

요소의 세분으로 더 정확한 결과가 얻어질 수 있겠지만 요소가 많으면 많을수록 전산기 사용 시간은 더욱 더 늘어나게 되어 경제성에서 문제가 따른다. 초기 강성법을 적용하였으므로, 역행렬 과정에서 소요되는 시간을 줄일 수 있지만, 시간 증분에 따라 재료의 기계적 성질이 변화하므로, 시간 단계가 진행됨에 따라 강성 행렬의 재조립이 필요하게 된다. 동일 단계 내에서는 역행렬을 구하지 않아도 되므로 어느 정도의 소요 시간이 감소되나 단계가 진행되면 역시 역행렬을 구해야 되기 때문에 계산 시간은 많이 소요된다.

본 해석에서 사용된 유한 요소는 평면 응력 막

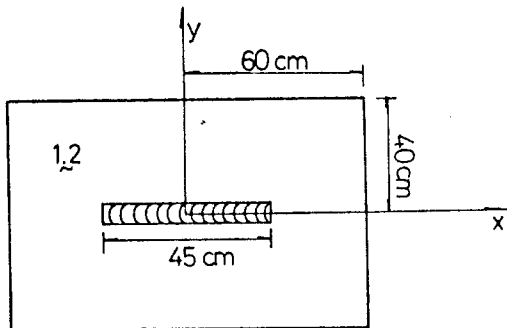


Fig. 7. Slit type butt welded joint.

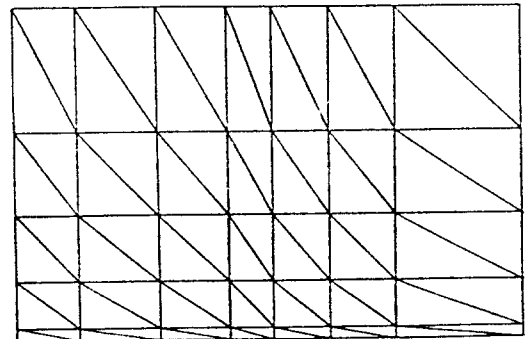


Fig. 8. Finite element model.

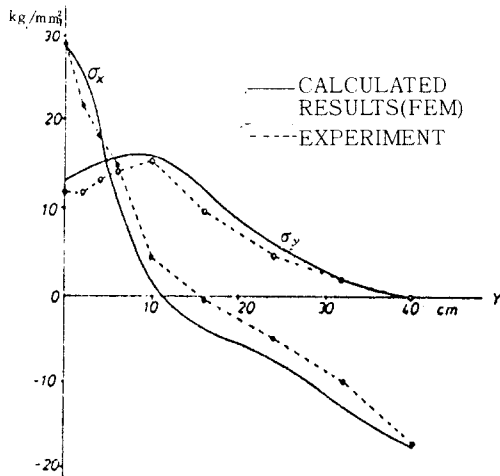


Fig. 9. Residual stress distribution along y-axis.

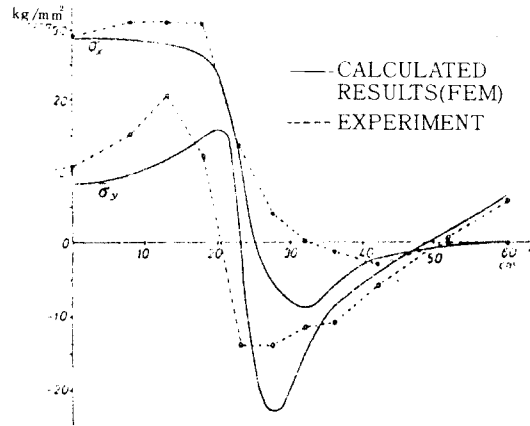


Fig.10. Residual stress distribution along x-axis.

요소 (plane stress membrane element) 이고, 요소 내에서 변형도는 일정하다.

11. 결 론

초기 강성법에 의한 기존의 열탄소성 해석에서는 탄성계수의 온도의존성이 고려될 수 없는데 비해 본 연구에서는 초기 변형도 자체에 탄성 계수의 온도의존성을 포함시킴으로 초기 강성법에 탄성계수의 온도의존성 고려가 가능함을 보여주었다. slit형 용접부에 대해 계산한 결과, 실험치와 양호한 일치를 얻을 수 있었다. 초기 변형도의 도입과 등가의 절점력 계산도 적절했음을 알 수 있고, 시간 증분의 제어도 만족할 만하다고 할 수 있다.

열탄소성 해석은 시간에 따라 탄소성 과정을 추적해야 하고, 반복 계산 과정을 거쳐야 하므로 방대한 전자 계산기 사용 시간을 요하고 있는데, 본 연구에서는 현재까지 접선 강성법에서만 가능했던 탄성계수의 온도의존성을 초기 강성법에도 적용 가능함을 보임으로, 계산 시간면에서 초기 성성법의 장점을 취하고 재료의 온도의존성 고려도 접선 강성법과 같이 되었다.

실제 용접 이음부에서는 다층 용접을 많이 실시하는데, 층을 거듭함에 따라 추가되는 용착 금속의 영향과 소성 변형도의 잔류 영향을 고려하는 연구와 재료의 금속학적 성질 변화도 고려한 연구가 수행되어야 할 것이다.

참고 문헌

1. 渡邊, 佐藤, 溶接力學とそ應用, 朝倉書店, (1965).
2. L.Tall, Residual Stresses in Welded Plates, Welding Journal, Vol.43, No. 1, (1964), pp.105~235.
3. 野本, 藤田, 熱彈塑性問題に關する研究(その1), 日本造船學會論文集, Vol.130, (1971), pp.183~191.
4. 佐藤, 上田, 藤本, 現代溶接技術大系 溶接變形・殘留應力, 産報出版, (1980), pp.215~226.
5. 山田, 塑性・點彈性, 培風館, (1972), pp.83~84.
6. K.Masubuchi, et al, Analysis of Thermal Stresses and Metal Movements of Weldments, Trans. SNAME, Vol. 83, (1975), pp.143~167.
7. K.Masubuchi, et al, Analysis and Control of Distortion in Welded Aluminium Structures, Trans. SNAME, Vol. 86, (1978), pp.77~100.
8. 藤田, 野本, 長谷川, 熱彈塑性問題に關する研究(その3), 日本造船學會論文集, Vol.144, (1978), pp.446~454.
9. K.Masubuchi, Analysis of Welded

Structures, Pergamon Press, (1980), pp. 69~75.

10. 藤本, スリット型突合せ溶接継手を有する長方形板残留應力, 溶接學會誌, 40(5), (1971), pp. 459~473.

부록 1. 가상 일의 원리

물체 내에 초기 변형도 $\{d\epsilon_0\}$ 이 존재할 때, 응력과 변형도 관계는 다음 식으로 표현된다.

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\epsilon - d\epsilon_0\} \quad (\text{A.1})$$

여기서 $\{d\sigma\}$ = 응력행렬

$\{d\epsilon\}$ = 변형도행렬

$[D]$ = 응력-변형도 관계 행렬

가상 일의 원리에 의하면,

$$\int_v \{\delta\epsilon\}^T \{d\sigma\} dv = \int_s \{\delta u\}^T \{dF\} ds + \int_v \{\delta u\}^T \{dx\} dv \quad (\text{A.2})$$

여기서, $\{dF\}$ = 표면력

$\{dx\}$ = 체적력

이다.

(A.1)을 (A.2)에 대입하면,

$$\int_v [B]^T [D] [B] dv \cdot \{du\} = \int_v [B]^T [D] \{d\epsilon_0\} dv + \int_s \{dF\} ds + \int_v \{dx\} dv \quad (\text{A.3})$$

여기서 $[B]$ 는 $\{d\epsilon\} = [B]\{du\}$ 의 관계를 나타내는 행렬이다.

$\{du\}$ = 변위행렬

부록 2. $d\lambda$ 의 유도

열변형도를 고려한 탄성역에서의 Hooke법칙은 (A.4)과 같이 된다.

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} + \alpha \cdot T \cdot \delta_{ij} \quad (\text{A.4})$$

여기서,

E = 탄성계수 (Young's modulus)

α = 선 팽창 계수 (thermal expansion

coefficient)

T = 온도

ν = Poisson's ratio

δ_{ij} = Kronecker's delta

(A.4)를 증분형으로 고치면

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \cdot d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot d\sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{E^2} \cdot \sigma_{ij} \cdot dE + \frac{\nu}{E^2} \cdot \sigma_{kk} \cdot dE \cdot \delta_{ij} + (T \cdot d\alpha + \alpha \cdot dT) \cdot \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

전 변형도 증분 (total strain increment)은 탄성 성분과 소성 성분의 합으로 표현된다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (\text{A.6})$$

Prandtl-Reuss 관계에 따르면

$$d\epsilon_{ij}^p = S_{ij} \cdot d\lambda \quad (\text{A.7})$$

여기서 $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij}$

(A.5), (A.7)을 (A.6)에 대입하면,

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \cdot dS_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \cdot d\sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} - \frac{1}{2G} \cdot \frac{dE}{E} \cdot S_{ij} - \frac{1-2\nu}{3E} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} + (\alpha \cdot dT + T \cdot d\alpha) \delta_{ij} + S_{ij} \cdot d\lambda \quad (\text{A.8})$$

여기서 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

(A.8)의 양변에 S_{ij} 를 곱하여 $d\lambda$ 에 관해 정리하면,

$$d\lambda = \frac{S_{ij} \cdot d\epsilon_{ij} - \frac{1}{2G} \cdot S_{ij} \cdot dS_{ij} + \frac{1}{2G} \cdot \frac{dE}{E} \cdot S_{ij} \cdot S_{ij}}{S_{ij} \cdot S_{ij}} \quad (\text{A.9})$$

4의 (3)식을 증분형으로 나타내면

$$S_{ij} \cdot dS_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_v \cdot d\sigma_v \quad (A.10)$$

가 되고 (A.9)에 대입하면

$$d\lambda = \frac{S_{ij} \cdot d\epsilon_{ij} - \frac{1}{3G} \sigma_v \cdot d\sigma_v}{S_{ij} \cdot S_{ij}} + \frac{1}{2G} \cdot \frac{dE}{E} \quad (A.11)$$

부록 3. 응력-변형도 관계식

(A.8)을 역으로 표현하면

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \cdot d\epsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot d\epsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + \frac{dE}{1+\nu} \cdot \epsilon^e_{ij} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} dE \cdot \epsilon^e_{kk} \cdot \delta_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} (dE \cdot \alpha \cdot T + E \cdot d\alpha \cdot T + E \cdot \alpha \cdot dT) - \frac{E}{1+\nu} \cdot S_{ij} \cdot d\lambda \quad (A.12)$$

(A.12)를 행렬 형태로 표시하면,

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x + \frac{dE}{E} \cdot \epsilon^e_x - d\epsilon_\theta - S_x \cdot d\lambda \\ d\epsilon_y + \frac{dE}{E} \cdot \epsilon^e_y - d\epsilon_\theta - S_y \cdot d\lambda \\ d\epsilon_z + \frac{dE}{E} \cdot \epsilon^e_z - d\epsilon_\theta - S_z \cdot d\lambda \\ d\gamma_{yz} + \frac{dE}{E} \cdot \gamma^e_{yz} - 2\tau_{yz} \cdot d\lambda \\ d\gamma_{zx} + \frac{dE}{E} \cdot \gamma^e_{zx} - 2\tau_{zx} \cdot d\lambda \\ d\gamma_{xy} + \frac{dE}{E} \cdot \gamma^e_{xy} - 2\tau_{xy} \cdot d\lambda \end{Bmatrix} \quad (A.13)$$

여기서 $d\epsilon_\theta = \frac{dE}{E} \cdot \alpha \cdot T + d\alpha \cdot T + \alpha \cdot dT$

평면 응력(plane stress) 문제에서는 두께 방향의 응력이 무시되므로, $d\sigma_z = d\tau_{yz} = d\tau_{zx} = 0$ 이 된다. (A.13)은 (A.14)와 같이 축소된다.

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x + \frac{dE}{E} \epsilon^e_x - d\epsilon_\theta - S_x d\lambda \\ d\epsilon_y + \frac{dE}{E} \epsilon^e_y - d\epsilon_\theta - S_y d\lambda \\ d\gamma_{xy} + \frac{dE}{E} \gamma^e_{xy} - 2\tau_{xy} d\lambda \end{Bmatrix} \quad (A.14)$$

$$d\epsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (d\epsilon_x + d\epsilon_y + \frac{dE}{E} \cdot \epsilon^e_x + \frac{dE}{E} \cdot \epsilon^e_y) - \frac{dE}{E} \cdot \epsilon^e_z + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot d\epsilon_\theta + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot S_z \cdot d\lambda \quad (A.15)$$